



Escola de Camins

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Camins, Canals i Ports
UPC BARCELONATECH

TESINA D'ESPECIALITAT

Títol

**Simulación numérica de procesos de desecación en suelos
cohesivos de baja plasticidad**

Autor/a

Hector Ulises Levatti

Tutor/a

Pere Prat Catalán y Alberto Ledesma Villalba

Departament

Ingeniería del Terreno, cartográfica y geofísica

Intensificació

Data

Noviembre de 2012

Simulación numérica de procesos de desecación en suelos cohesivos de baja plasticidad

Autor: Héctor Ulises Levatti

Tutores: Pere Prat Catalán y Alberto Ledesma Villalba

Resumen

Los suelos son usados como material de construcción desde que el hombre se hizo sedentario y su estudio requiere tener en cuenta muchos factores que en otros materiales carecen de importancia. Una dificultad característica de los suelos es que se trata de un sistema multifase, y además algunas de estas fases se pueden presentar en varios estados de agregación cambiantes a lo largo del tiempo. Si nos centramos específicamente en los suelos arcillosos por ejemplo, debemos tener en cuenta que este puede presentarse totalmente seco, saturado o parcialmente saturado y además pasaremos de un estado a otro con relativa facilidad.

La presente tesina abarca aspectos teóricos y numéricos relacionados con los procesos de desecación y agrietamiento de suelos de tipo arcilloso debidos a evaporación del agua que contienen en su interior. Los resultados fueron obtenidos de la simulación numérica de la desecación y agrietamiento a través de un programa basado en el método de los elementos finitos implementado en el entorno MATLAB R2007b.

Trabajos anteriores en el departamento de ingeniería del terreno han caracterizado varios tipos de suelo que presentan el característico proceso de contracción y agrietamiento debidos a desecación. Se han establecido parámetros de la mecánica

de fractura tales como la resistencia a tracción y la tenacidad a la fractura en condiciones no saturadas.

El proceso de contracción debido a desecación se ha estudiado basándonos en la mecánica de suelos no saturados a través del concepto de superficies de estado en cuanto a la componente mecánica y de flujo en suelos no saturados para la componente hidráulica. El método de los elementos finitos ha permitido resolver los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales que emergen de la formulación hidromecánica del fenómeno.

El desarrollo del modelo numérico propuesto ha permitido comprender, aunque parcialmente, la implicación de la succión en los procesos de desecación y agrietamiento. De esta variable dependen los parámetros mecánicos e hidráulicos del modelo. Ha sido posible capturar de manera cualitativa y cuantitativa el fenómeno de rizado asociados a este tipo de proceso para el caso de delgadas láminas de suelo. A través de este trabajo puede comprenderse mejor la interacción hidromecánica presente durante la retracción del suelo.

Tanto si se estudia el suelo en el campo como en el laboratorio, el contacto entre la masa adyacente de terreno o el contacto con las bandejas que lo contienen las condiciones de contorno en desplazamientos son complejas de reproducir en un modelo numérico. Los contactos entre suelo y suelo y entre suelo y bandeja es un problema complejo que solo es aproximado mediante las clásicas condiciones de contorno en desplazamientos propias del método de los elementos finitos.

De los resultados se desprende la gran influencia que tienen las condiciones de contorno inicial en el comportamiento del suelo y evidencia la necesidad de estudiar más a fondo este aspecto.

Todas las simulaciones presentadas son en 2D lo cual limita el alcance del estudio y queda de manifiesto la necesidad de expansión a modelos tridimensionales.

Simulació numèrica de processos de dessecació en sòls cohesius de baixa plasticitat

Autor: Héctor Ulises Levatti

Tutors: Pere Prat Catalán i Alberto Ledesma Villalba

Resum

Els sòls són usats com a material de construcció des que l'home es va fer sedentari i el seu estudi requereix tenir en compte molts factors que en altres materials no tenen importància. Una dificultat característica dels sòls és que es tracta d'un sistema multifase, ja més algunes d'aquestes fases es poden presentar a diversos estats d'agregació canviant al llarg del temps. Si ens centrem específicament en els sòls argilosos per exemple, hem de tenir en compte que aquest pot presentar totalment sec, saturat o parcialment saturat ja més passarem d'un estat a un altre amb relativa facilitat.

Aquesta tesina abasta aspectes teòrics i numèrics relacionats amb els processos de dessecació i esquerdament de sòls de tipus argilós deguts a l'evaporació de l'aigua que contenen al seu interior. Els resultats van ser obtinguts a partir de la simulació numèrica de la dessecació i esquerdament a través d'un programa basat en el mètode dels elements finits implementat en l'entorn MATLAB R2007b.

Treballs anteriors al departament d'enginyeria del terreny han caracteritzat diversos tipus de sòl que presenten el característic procés de contracció i esquerdament deguts a dessecació. S'han establert paràmetres de la mecànica de fractura com ara la resistència a tracció i la tenacitat a la fractura en condicions no saturats.

El procés de contracció a causa de dessecació s'ha estudiat basant-nos en la mecànica de sòls no saturats a través del concepte de superfícies d'estat pel que fa a la component mecànica i de flux en sòls no saturats per a la component hidràulica. El mètode dels elements finits ha permès resoldre els sistemes d'equacions en derivades parcials que sorgeixen de la formulació hidromecànica del fenomen.

El desenvolupament del model numèric proposat ha permès comprendre, encara que parcialment, la implicació de la succió en els processos de dessecació i esquerdament. D'aquesta variable depenen els paràmetres mecànics i hidràulics del model. Ha estat possible capturar de manera qualitativa i quantitativa el fenomen de arrissat associats a aquest tipus de procés per al cas de primes làmines de sòl. A través d'aquest treball pot comprendre millor la interacció hidromecànica present durant la retracció del sòl.

Tant si s'estudia el sòl en el camp com al laboratori, el contacte entre la massa adjacent de terreny o el contacte amb les safates que el contenen les condicions de contorn en desplaçaments són complexes de reproduir en un model numèric. Els contactes entre sòl i sòl i entre sòl i safata és un problema complex que només és aproximat mitjançant les clàssiques condicions de contorn en desplaçaments pròpies del mètode dels elements finits.

Dels resultats es desprèn la gran influència que tenen les condicions de contorn inicial en el comportament del sòl i evidència la necessitat d'estudiar més a fons aquest aspecte.

Totes les simulacions presentades són en 2D la qual cosa limita l'abast de l'estudi i queda de manifest la necessitat d'expansió a models tridimensionals.

Numerical Simulation of processes of desiccation in cohesive low plasticity soils

Author: Hector Ulises Levatti

Advisors: Pere Prat Catalán and Alberto Ledesma Villalba

Abstract

Soils was using as a construction materials from that the men became sedentary. In the study of soils many factors must be take in count in opposite to other types of construction materials. Soils are a multiphase systems and these phase can be change its states during the time. Thinking specifically in clayey soils for example, we have to take in count that the soil can be dry, partially dry or wet and moreover this soil can pass from one state to other with relatively easy.

The present degree thesis includes theoretical and numerical aspects regarding with processes of desiccation and cracking of clayey soils that take place during evaporation of water content from inside them. Results have been obtained from the numerical simulation of desiccation and cracking by mean a program finite element method based and implemented in MATLAB R2007b environment.

Previous works at the department of geotechnical engineering have characterized a few kinds of soils that shrink and crack under drying. Fracture mechanics parameters like tensile strength and fracture toughness have been established for unsaturated conditions.

The process of contraction due to desiccation was studied based on the unsaturated soil mechanics. The concept of state surface was used for the mechanical part of the problem and the flow in unsaturated soils was used for the hydraulic component of the

process of desiccation. The finite element method has solved the systems of partial differential equations arising from the hydro mechanical framework of the phenomenon. The development of the proposed numerical model has provided an understanding, although partially, the involvement of the suction in the process of drying and cracking. Mechanical and hydraulic parameters of the model are suction dependent. It was possible to capture qualitatively and quantitatively the curling phenomenon associated with this type of process for the case of thin layers of soil. Through this work may be better understood hydro mechanical interaction present during the retraction of the soil. Whether studying the soil in field or in the laboratory, the contacts between the lands mass adjacent or in contact with the trays that contain the soil, boundary conditions in displacements are complex to reproduce in a numerical model. The contact between soil and soil and between soil and tray is a complex problem that is only poorly approximated by the classical boundary conditions in displacement characteristic of the finite element method.

The results show the great influence that the initial boundary conditions in the soil behaviour and demonstrates the need to further study this aspect.

All presented simulations are 2D which limits the scope of the study and is illustrated the need for expansion to three-dimensional models.

Agradecimientos

En primer lugar, quiero expresar mi gratitud a mis tutores de doctorado que a su vez son mis tutores de esta tesina de final de carrera. Gracias sobre todo por la paciencia y por el apoyo a la hora de encarar el desafío de convalidar mi carrera de Ingeniería en Construcciones de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Nordeste en Argentina y poder aspirar a obtener así el grado de Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos de la Escuela de Ingenieros de Caminos de la Universidad Politécnica de Cataluña en Barcelona, España.

Gracias a mi familia, mi esposa Sandra y mi hijo Alejandro, los cuales son siempre una fuente de inspiración y motivación en todo desafío que me propongo.

Gracias además al apoyo incondicional de mi madre Felicita y mis hermanos Carmen y Oscar que siempre están allí, en Argentina, apoyando a través de la distancia en todos mis proyectos.

Desde 2004, el departamento de Ingeniería del Terreno ha sido mi casa. Así pues, agradezco a toda la gente que forma parte tanto del departamento como de la Universidad y la Escuela de Caminos. En especial a la gente del laboratorio, el soporte informático y la administración del Departamento de Ingeniería del Terreno.

Expreso aquí mi agradecimiento a todos mis amigos que apoyan y dan ánimos cuando hace falta. No hace falta nombrarlos uno a uno, ellos saben sin duda quienes son.

Un especial agradecimiento al Ministerio de Educación de España porque ha hecho posible a través de más de una beca mi formación de postgrado así como también en parte mi convalidación del título de grado, no sin antes demandarme un gran esfuerzo que sin embargo a servido para mejorar notablemente mi perfil profesional.

Finalmente un especial agradecimiento y recuerdo a mi padre Ulises el cual en gran parte a hecho de mi lo que soy.

Héctor Ulises Levatti

Barcelona, Noviembre de 2012.

5.1.2.- El problema de flujo no saturado.....	42
5.1.2.1.- Funciones de forma para el problema hidráulico..	43
5.1.3.- Discretización temporal del problema acoplado.....	48
5.1.3.1.- Estrategia de implementación.....	49
5.1.4.- Discretización temporal del problema desacoplado.....	50
5.2.- Formulación u-p de elementos finitos para el flujo en medio poroso deformable.....	51
5.2.1.- Espacio de 2 dimensiones. Elemento lineal.....	51
5.2.1.1.- Campo de presiones de poro de agua. Elemento lineal.....	52
5.2.1.2.- Campo de desplazamientos. Elemento lineal.....	55
5.2.2.- Expresiones matriciales para elementos lineales.....	56
5.2.3.- Espacio de 2 dimensiones. Elemento cuadrático.....	61
5.2.3.1.- Campo de presiones de poro. Triángulo de 6 nodos.....	61
5.2.3.2.- Campo de desplazamientos. Triángulo de 6 nodos.....	62
5.2.4.- Expresiones matriciales para elementos cuadráticos.....	63
6.- Resultados.....	69
6.1.- Introducción.....	69
6.2.- Análisis cualitativo.....	70
6.2.1.- Desecación isótropa.....	70
6.2.2.- Evolución de la presión de poros en 2D y deformación Plana.....	71
6.2.3.- Contracción por secado.....	72
6.2.4.- Esquemas (a) y (b).....	73
6.2.5.- Esquema (c).....	76
6.2.6.- Esquemas (d) y (e).....	76
6.2.7.- Esquema (f).....	76
6.2.8.- Influencia de una grieta central.....	78
6.2.9.- Rizado (curling).....	81
6.2.9.1.- Ensayo de laboratorio para estudiar el curling en arcilla de Australia.....	82
7.- Conclusiones y futuras líneas de investigación.....	89
Referencias.....	i
Por orden alfabético.....	i
Por capítulos.....	iv
Capítulo 1 – Introducción y Objetivos.....	iv
Capítulo 2 – Características del material a utilizar.....	iv
Capítulo 3 – Procesos Físicos.....	v
Capítulo 4 – Modelo hidromecánico.....	v
Capítulo 6 – Resultados.....	vi
Capítulo 7 – Conclusiones y futuras líneas de investigación.....	vii
Bibliografía	ix
Apéndice I. Notación y símbolos.....	I

Lista de tablas

Tabla 2.1.- Arcilla de Bogotá (Colombia) Tesis Ávila Álvarez, Guillermo (2004)	12
Tabla 2.2.- Arcilla de Barcelona (España) Tesis Lakshmikantha, M.R. (2009)....	13
Tabla 2.3.- Residuos mineros tesis Rodríguez Pacheco, R.L. (2002).....	13
Tabla 2.4.- Arcilla de Werribee, Victoria, Australia. Nahlawi and Kodikara (2006).....	14
Tabla 6.1.- Propiedades de la arcilla y resumen de los ensayos de laboratorio.....	83

Lista de figuras

Figura 1.1.- Ejemplos de suelos sometidos a desecación.....	5
Figura 1.2.- Ejemplos de suelos sometidos a desecación.....	6
Figura 2.1.- Clasificación de suelos según la granulometría.....	10
Figura 2.2.- Sistema Universal de clasificación de suelos.....	11
Figura 2.3.- Sistema Unificado de clasificación de suelos.....	11
Tabla 2.1.- Arcilla de Bogotá (Colombia) Tesis Ávila Álvarez, Guillermo (2004).....	11
Figura 3.1.- Agrietamiento por desecación en suelos arcillosos. Río Grande, Méjico arriba; Lecho de un lago en Australia abajo.....	16
Figura 3.2.- Lodo que presenta tres estados de arriba hacia abajo en la foto. Sano y saturado, parcialmente saturado y agrietado y seco.....	17
Figura 3.3.- Cámara ambiental en laboratorio Departamento de Ingeniería del Terreno UPC. De Lakamishkantha Phd Thesis (2009).....	18
Figura 4.1.- Superficies de Estado, de Matyas and Radhakrishna 1968.....	28
Figura 5.1.- Elemento triángulo lineal (3 nodos).....	52
Figura 5.2.- Elemento triángulo lineal (3 nodos, 2 grados de libertad por nodo)	55
Figura 5.3.- Elemento triángulo cuadrático (6 nodos, 3 puntos de Gauss).....	61
Figura 5.4.- Elemento triángulo cuadrático (6 nodos, 3 puntos de Gauss, 2 grados de libertad por nodo).....	62
Figura 6.1.- Esquema del problema y Malla de elementos finitos de una muestra circular sometida a desecación en todo su contorno.....	70
Figura 6.2.- Evolución de la desecación en una esfera considerando estado de deformación plana.....	70
Figura 6.3.- Variación de la presión de poros en altura de una muestra de suelo en función del tiempo.....	72
Figura 6.4.- Representación esquemática de las condiciones de contorno en desplazamiento y en presiones de poro.....	73

Figura 6.5.- Campo de tensiones horizontal durante el proceso de desecación (esquemas a y b en la Figura 6.4).....	74
Figura 6.6.- (a) Evolución de la tensión y la deformación durante la desecación; (b) Campo de tensiones horizontales (a y b referidos al esquema de la figura 6.4c).....	75
Figura 6.7.- Evolución de la tensión y la deformación durante la desecación (esquemas d, e, y f de la Figura 6.4).....	77
Figura 6.8.- Esquemas utilizados para la simulación.....	78
Figura 6.9.- Influencia de la longitud de una grieta central en los campos de presiones de poro y tensiones.....	79
Figura 6.10.- Variación del grado de saturación y de la presión de poros para distintas longitudes de grieta.....	80
Figura 6.11.- Contracción inicial y curling final a las 65.5 hs de la arcilla de Werribee.....	81
Figura 6.12.- Curva de secado del ensayo 1 y 3.....	82
Figura 6.13.- (a) Curva de retención para las muestras 1 y 2; (b) Succión matricial vs. deformación de la arcilla de Werribee.....	83
Figura 6.14.- Variación del módulo elástico H en función de la succión Matricial.....	84
Figura 6.15.- Comparación de simulaciones hechas con FLAC y con Código Matlab.....	85

Capítulo 1

Introducción

1.1. Alcances de la tesis

Los suelos son usados como material de construcción desde que el hombre se hizo sedentario y su estudio requiere tener en cuenta muchos factores que en otros materiales de construcción carecen de importancia. Una dificultad característica de los suelos es que se trata de un sistema multifase, y además algunas de estas fases se pueden presentar en varios estados, cambiantes a lo largo del tiempo. Si nos centramos específicamente en los suelos arcillosos por ejemplo debemos tener en cuenta que este puede presentarse totalmente seco, saturado o parcialmente saturado y además pasaremos de un estado a otro con relativa facilidad.

El problema que se va a abordar es el agrietamiento de suelos arcillosos durante el proceso de desecación. El fenómeno de desecación parte generalmente desde el suelo totalmente saturado y acaba con el suelo en estado parcialmente saturado o seco según el caso. Esto es como trabajar con tres materiales diferentes, ya que el comportamiento de las arcillas en los tres estados es en general distinto.

Es importante entender desde el principio que el fenómeno de la desecación incluye tanto el proceso de inicio de formación de la grieta como el fenómeno de propagación de esta. Así, al parecer *el fenómeno de inicio de la grieta cae en el campo de la mecánica de suelos saturados y no saturados y los problemas de flujo de aguas en medios porosos*. Aceptando este hecho parece adecuado abordar este problema mediante un modelo Hidromecánico para suelos no saturados que simulará la pérdida

de agua de la masa de suelo y su contracción hasta que en ciertos puntos se alcancen las condiciones necesarias para el inicio de las fisuras. Luego *el fenómeno de propagación de las grietas cae en el campo de la mecánica de fractura*. Creemos que la mecánica de fractura será capaz de predecir la propagación de las fisuras en la masa de suelo. En esta tesina no se pretende abordar el problema mediante las teorías más complejas desde el principio, sino demostrar que un modelo HM más la inserción de grietas predefinidas nos permitirán desarrollar una herramienta útil para resolver el problema de las grietas por desecación. En un futuro será posible agregar complejidad a este planteo inicial mediante el desarrollo de una tesis doctoral en curso del autor del presente trabajo.

Tenemos de esta manera al principio un problema hidromecánico en principio acoplado y seguidamente un problema de análisis de la influencia de las grietas en el proceso de desecación que están íntimamente relacionados.

Se intenta modelar matemáticamente este complejo fenómeno para explicar la influencia e interacción de las grietas en suelos tipo arcilla sometidos a procesos de secado debido al cambio en las variables medioambientales.

1.2. Campos de aplicación

Muchas veces los suelos arcillosos se utilizan como aislante hidráulico en obras de ingeniería. Así por ejemplo una presa de gravedad hecha de material arcilloso se agrieta por desecación cuando los niveles de agua de la presa bajan, luego el núcleo pierde su capacidad de retener el agua. En una presa además el suelo cumple una función estructural, dando estabilidad a la estructura, la cual se verá afectada también si aparecen grietas. Cabe aclarar que las presas que sufrirán los efectos de la desecación serán aquellas de pequeñas dimensiones y cuyo material de construcción es solo arcilla. Las grandes presas con núcleos arcillosos impermeables protegen a este de la acción climática con otros materiales como la grava y arena, por lo que resulta muy improbable que se lleguen a estados que produzcan desecación.

Igualmente si tenemos por ejemplo un vertedero donde acometen fluidos cloacales o con desperdicios, se suele utilizar suelo arcilloso para aislar las napas de agua de la posibilidad de filtraciones de desperdicios hasta ellas. La aparición de grietas tiene una consecuencia devastadora puesto que la capacidad impermeable se pierde por completo.

También podemos citar el caso de aislamiento de depósitos de material radiactivo mediante arcillas que si se agrietan pierden su capacidad de retención de las fugas de los desperdicios. En este caso las grietas se producen por la acción del calor de la radiación. Cuando hablamos de fenómenos radiactivos no hay que olvidar que se tratan de procesos que duran muchos miles de años y durante todo ese tiempo el material debe trabajar en condiciones óptimas.

Otro caso donde el estudio de las grietas es importante es en el caso de tener que evaluar el flujo de contaminantes a través de un suelo en depósitos de desperdicios de minas, este flujo se verá muy afectado por un agrietamiento ya que depende mucho de la permeabilidad del medio que a su vez depende fuertemente de la existencia de grietas. Los desperdicios de minas se tratan generalmente de metales pesados que son altamente contaminantes, de ahí la importancia del control de las grietas.

Así, es fundamental poder predecir con cierta exactitud cuando y como se producirán y sobre todo progresarán estas grietas y hasta que punto. Que profundidad alcanzarán y como estarán espaciadas.

Por otro lado, al día de hoy, los mecanismos que gobiernan este fenómeno son esquivos y no se encuentran del todo establecidos. La presente tesina intenta como objetivo aportar luz al comportamiento de los suelos cohesivos bajo desecación, así como también intenta proporcionar una herramienta de cálculo y análisis del problema. Esto último es importante además porque no solo en la ingeniería geotécnica existe interés por los fenómenos de desecación. También en actividades de manufactura de productos tales como comida, madera, cerámica, polímeros, etc. Es un tema de actualidad e interés.

1.3. Modelo Matemático

Todo proceso natural que pretenda ser estudiado deberá ser modelado matemáticamente, es decir, debemos encontrar las relaciones entre las distintas variables que describen el fenómeno. Estas relaciones son las ecuaciones que gobiernan el problema y cuando se trata de fenómenos complejos como en que pretendemos estudiar caemos necesariamente en ecuaciones de tipo diferencial y más precisamente en ecuaciones en derivadas parciales (EDPs), las cuales generalmente no tienen solución exacta, lo que nos lleva a tener que resolverlas por algún método aproximado como el *método de los elementos finitos*, método de las diferencias finitas, método de los volúmenes finitos, método de los elementos de contorno, etc.

La tarea encomendada en esta tesina es precisamente presentar un modelo matemático formulado en el desarrollo de una tesis doctoral en curso para describir el fenómeno de contracción de suelos por efecto de la desecación. Además mostrar algunos resultados preliminares de las capacidades del código de elementos finitos implementado durante el desarrollo de la tesis doctoral mencionada arriba y cuyo autor es el que firma la presente tesina.

Además se abordan dos problemas interesantes como son la influencia de las grietas en los procesos de secado y el rizado de suelos de delgado espesor sometidos a desecación.

En un trabajo anterior (tesina de máster) se ha presentado un modelo mecánico que resuelve el problema de la contracción del suelo debida a distintos perfiles de succión que actúan sobre dicho suelo. En el presente trabajo queda en evidencia la necesidad de implementar un modelo hidro-mecánico como mínimo para abordar el problema. También manifiesta la complejidad que tiene el problema de flujo en medio poroso no saturado por sí mismo. El acoplamiento con el problema mecánico complica aún más la solución. Se está trabajando además en una tesis doctoral que incluye el problema de fractura del suelo lo cual añade más dificultad al planteo y a la resolución de los problemas que puede ser necesario plantear numéricamente.

1.4. Complejidad y Variedad

Como se dijo al principio, el proceso de desecación incluye varias etapas. Sin embargo el estado final alcanzado por el suelo, es el mas llamativo a simple vista y puede dar ciertos indicios a cerca del comportamiento de los suelos. A un problema de por si complejo, cabe añadir la variedad de comportamiento. Veamos por ejemplo en las siguientes Figuras (Fig. 1.1 y Fig. 1.2) distintos casos de suelos que se han desecado. A pesar de que en todos los casos se presentan características generales, existen diferencias extremas. El patrón de agrietamiento tiende en general hacia el hexagonal aunque vemos que también hay casos que se alejan hacia un patrón más bien rectangular. El grosor y profundidad de las grietas es también muy variable, desde apenas perceptible a simple vista hasta grietas de enormes dimensiones. El fenómeno de rizado a veces parece inexistente y a veces llega a extremos muy llamativos. Numerosos estudios se han hecho respecto del fenómeno de desecación y agrietamiento de suelos. Por ejemplo, un trabajo muy completo es el de ([Konrad J.M. y Ayad. R., 1997a y b](#)). Estos dos artículos dan una explicación basada en la



1.1.a Karkheh, Irán



1.1.b



1.1.c



1.1.d



1.1.e África



1.1.f

Figura 1.1.- Ejemplos de suelos sometidos a desecación



1.2.a EEUU



1.2.b



1.2.c Australia



1.2.d



1.2.e Laboratorio



1.2.f Laboratorio

Figura 1.2.- Ejemplos de suelos sometidos a desecación

experimentación y en una propuesta de explicación teórica del proceso de desecación en suelos.

Numerosos son los trabajos que enfocan el estudio de este proceso tanto de manera experimental como teórica y numérica. Podemos referenciar aquí los trabajos de (Abu-Hejleh, A. N. and Znidarcic, D, 1995); (Chertkov, V. Y. and Ravina, I., 2000); (Chudnovsky, A. Et al., 1988); (Edorgan, F., Sih, G.C., 1963); (Ingraffea, A.R., 1978); (Hu, L., 2006); (Lachenbruch, A. H., 1961), etc. Como puede verse, hay artículos desde los años 1960 y muy recientes. Este es un tema que tiene interés hace mucho tiempo pero que es esquivo y difícil de abordar.

1.5. Objetivos de la tesina

En un trabajo de estas características y siendo que el problema propuesto presenta una gran complejidad, es muy importante establecer cuáles son los objetivos que se pretenden con el trabajo. Al día de hoy, el problema de desecación de suelos en un problema abierto y que está lejos de ser resuelto de manera general y satisfactoria. Esta tesina aporta su grano de arena en la comprensión del fenómeno y ofrece una herramienta de análisis para ciertos aspectos parciales del problema.

Los objetivos pretendidos en este trabajo son los siguientes:

1. Presentar una formulación matemática de un modelo hidromecánico relativamente sencillo que permite estudiar el problema de contracción producido por secado en suelos arcillosos.
2. Comprobar que la aproximación hidromecánica propuesta es capaz de reproducir los principales mecanismos que gobiernan los procesos de contracción en suelos sometidos a desecación. Para ello se muestran algunos resultados de simulación de procesos de desecación que aproximan la realidad estudiada en el laboratorio.
3. Comprender los mecanismos hidromecánicos que controlan dichos procesos.
4. Dar una explicación geotécnica a algunos de los fenómenos particulares hallados durante los experimentos de laboratorio.

5. Evidenciar la influencia de las condiciones de contorno durante el secado.
6. Determinar la influencia de las grietas en el comportamiento general de la masa de suelo y sus efectos en la respuesta mecánica e hidráulica.

Capítulo 2

Características del Suelo a Simular

2.1. Introducción

El suelo es un material producto de la descomposición física (mecánica) y/o química de las rocas. Abarca por tanto una gran variedad. En este trabajo nos centramos en el estudio del comportamiento durante la desecación de suelos finos. Arcillas, arcillas limosas o limos arcillosos, mezclas de suelos del tipo de la zona resaltada en amarillo en la Figura 2.1.

2.2. Clasificación de suelos

En las figuras 2.1, 2.2 y 2.3 se presentan los sistemas de clasificación de suelos según granulometría, universal y unificado respectivamente.

En las figuras 2.1 y 2.3 se sombrea en amarillo los tipos de suelos que corresponden a este trabajo, es decir, suelos arcillosos y además de baja plasticidad.

Suelo	Fracción del suelo	Símbolo	Granulometría y descripción	Definición de las propiedades
Fracciones gruesas	Bloques	No hay	Redondeados a angulosos, formados por rocas duras; <i>gran tamaño</i> y <i>diámetro</i> medio superior a 30 cm	Los bloques y boleos son elementos muy estables utilizados para terraplenes, balastos y para estabilizar taludes (enrocamientos). Debido a su tamaño y peso su presencia en los depósitos naturales de suelo tiende a mejorar la estabilidad de las cimentaciones. La angularidad de las partículas aumenta la estabilidad.
	Boleos, bolos	No hay	Redondeados a angulosos, procedentes de rocas duras; diámetros medio inferior a 30 cm pero superior a 15 cm.	
	Grava	<i>G</i>	Redondeada a angulosa, procedente de rocas duras; pasa por el tamiz de 3" (76.2 mm) y es retenida por el tamiz No. 4 (4.76 mm)	La grava y la arena tienen esencialmente las mismas propiedades ingenieriles aunque en grados diferentes. El tamiz No. 4 es una división arbitraria y no corresponde a un cambio apreciable de propiedades. Son fáciles de compactar, resultan poco afectadas por la humedad y no están sujetas a la acción de la helada. Las gravas suelen ser más estables frente al flujo de agua y más resistentes a la erosión y a la tubificación que las arenas. Las arenas y gravas bien graduadas son generalmente menos permeables y más estables que aquellas deficientemente graduadas (granulometría uniforme). La irregularidad de las partículas hace aumentar ligeramente la estabilidad. La arena fina uniforme tiene características próximas a un limo: es decir, disminuye su permeabilidad y reduce su estabilidad al aumentar la humedad.
	Gruesa		Entre los tamices 3" a 3 1/4" (76.2 a 19 mm)	
	Fina		Entre los tamices 3/4" y No. 4 (19 mm a 4.76 mm)	
	Arena	<i>S</i>	Redondeada a angulosa, procedente de rocas duras; pasa por el tamiz No. 4 (4.76 mm) y es retenida por el tamiz No. 200 (0.074 mm)	
	Gruesa		Tamices No. 4 a 10	
	Media		Tamices No. 10 a 40	
	Fina		Tamices No. 40 a 200	
Fracciones finas	Limo	<i>M</i>	Partículas que pasan por el tamiz No. 200 (0.074 mm). Identificables por su comportamiento: es decir, ligeramente plásticas o sin plasticidad cualquiera que sea la humedad y con escasa o nula resistencia al secarse al aire.	El limo es inestable por su propia naturaleza, particularmente cuando aumenta la humedad, con tendencia a fluir cuando está saturado. Es relativamente impermeable, difícil de compactar, muy susceptible a la acción de la helada, fácilmente erosionable y sujeto a la tubificación y ebullición. Los granos de forma cúbica reducen la compresibilidad; los granos lajosos, como la mica, diatomeas, etc, aumentan la compresibilidad, dan lugar a un limo "elástico".
	Arcilla	<i>C</i>	Partículas que pasan por el tamiz No. 200 (0.074 mm). Identificables por su comportamiento: es decir, puede conseguirse que presenten propiedades de plasticidad dentro de una amplia gama de humedades y posean considerable resistencia al secarse al aire.	La característica diferenciante de la arcilla es la cohesión o resistencia cohesiva, que aumenta al disminuir la humedad. La permeabilidad de la arcilla es muy baja, es difícil de compactar en estado húmedo e imposible de drenar por métodos ordinarios; compactada es resistente a la erosión y a la tubificación, no es susceptible a hinchamientos por efecto de la helada. Está sometida a expansión y retracción con las variaciones de humedad. Las propiedades dependen no sólo del tamaño y forma (partículas laminadas, lamosas), sino también por su composición mineral, es decir, el tipo de mineral arcilloso y el medio químico o la capacidad de intercambio iónico. En general el mineral arcilloso montmorilinita tiene el mayor efecto sobre las propiedades, siendo este efecto mínimo en el caso de la illita y la caolinita.
	Materia orgánica	<i>O</i>	Materia orgánica de diversos tamaños y en diversas fases de descomposición.	La presencia de materia orgánica incluso en cantidades moderadas hace aumentar la compresibilidad y reduce la estabilidad de las fracciones finas del suelo. Puede descomponerse creando vacíos y haciendo variar las propiedades de un suelo por alteración química por lo cual los suelos orgánicos no son adecuados para usos ingenieriles.

Figura 2.1.- Clasificación de suelos según la granulometría

Identificación en el campo (excluyendo las partículas mayores de 7.6 cm (3") y basando las fracciones en peso estimadas)		Símbolo del grupo	Nombres típicos	Información necesaria para la descripción de los suelos	Criterios de clasificación en el laboratorio	
Suelos de grano grueso de la unidad del tamiz No. 200 (La abertura del tamiz No. 200 corresponde aproximadamente al tamaño de la menor partícula apreciable a simple vista)	Grava más de la mitad de la fracción gruesa (mayor de 7.6 cm (3") y menor de 25 mm (1"))	GW	Gravas bien graduadas, medias de grava y arena con pocos finos o sin ellos	Des: el nombre típico; indiquense los porcentajes aproximados de grava y arena, tamaño máximo, espesidad, estado superficial y dureza de los granos gruesos; el nombre local o geológico y cualquier otra información o descripción pertinente y el símbolo entre paréntesis. Para los suelos inalterados aplíquense información sobre estratificación, compactación, consistencia, condiciones de humedad y características de drenaje. Ejemplo: Arena limosa, con grava; aproximadamente un 20% de partículas de grava angulosas de 1.5 cm de tamaño máximo; arena gruesa a fina, con partículas redondeadas o subangulosas, alrededor del 15% de finos no plásticos, con baja resistencia en estado seco compacte y húmedo in situ; arena aluvial; (SM)	$C_u = \frac{D_{60}}{D_{10}}$ Mayor de 4 $C_u = \frac{D_{60}}{D_{10} \times D_{30}}$ Entre 1 y 3	No satisfacen todos los requisitos granulométricos de las GW Límites de Atterberg por debajo de la línea "A" o I_p menor de 4 Por encima de la línea "A", con I_p entre 4 y 7; caso límites que requieren el uso de símbolos dobles
	Grava con arena (mayor de 7.6 cm (3") y menor de 25 mm (1"))	GP	Gravas mal graduadas, medias de arena y grava con pocos finos o sin ellos		$C_u = \frac{D_{60}}{D_{10} \times D_{30}}$ Mayor de 6 $C_u = \frac{D_{60}}{D_{10} \times D_{30}}$ Entre 1 y 3	No satisfacen todos los requisitos granulométricos de las GP Límites de Atterberg por debajo de la línea "A" o I_p menor de 4 Por encima de la línea "A", con I_p entre 4 y 7; caso límites que requieren el uso de símbolos dobles
	Arena limosa (mayor de 7.6 cm (3") y menor de 25 mm (1"))	GM	Gravas limosas, medias mal graduadas de grava, arena y limo			
	Arena con arena (mayor de 7.6 cm (3") y menor de 25 mm (1"))	GC	Gravas arcillosas, medias mal graduadas de grava, arena y arcilla			
Suelos de grano fino de la unidad del tamiz No. 200 (La abertura del tamiz No. 200 corresponde aproximadamente al tamaño de la menor partícula apreciable a simple vista)	Arena limosa (mayor de 7.6 cm (3") y menor de 25 mm (1"))	SW	Arenas bien graduadas, arenas con grava, con pocos finos o sin ellos	Des: el nombre típico; indiquense el grado y carácter de la plasticidad; la cantidad y el tamaño máximo de las partículas gruesas; color del suelo húmedo, olor si lo tuviere, nombre local y geológico; cualquier otra información descriptiva pertinente y el símbolo entre paréntesis. Para los suelos inalterados aplíquense información sobre la estructura, estratificación, consistencia, comportamiento en estado húmedo como remolado, condiciones de humedad y drenaje. Ejemplo: Limo arcilloso, mantoso; ligeramente plástico; porcentaje reducido de arena fina; cohesión; agrietamiento vertical de raíces; firme y seco in situ; limo; (ML)	$C_u = \frac{D_{60}}{D_{10}}$ Mayor de 4 $C_u = \frac{D_{60}}{D_{10} \times D_{30}}$ Entre 1 y 3	No satisfacen todos los requisitos granulométricos de las SW Límites de Atterberg por debajo de la línea "A" o I_p menor de 4 Por encima de la línea "A", con I_p entre 4 y 7; caso límites que requieren el uso de símbolos dobles
	Arena con arena (mayor de 7.6 cm (3") y menor de 25 mm (1"))	SP	Arenas mal graduadas, arenas con grava, con pocos finos o sin ellos			
	Arena limosa (mayor de 7.6 cm (3") y menor de 25 mm (1"))	SM	Arenas limosas, medias de arena y limo mal graduadas			
	Arena con arena (mayor de 7.6 cm (3") y menor de 25 mm (1"))	SC	Arenas arcillosas, medias mal graduadas de arena y arcilla			
Métodos de identificación para la fracción que pasa por el tamiz No. 40.						
Limo y arcilla con límites de plasticidad de 50	Resistencia en estado seco (a la desmenuación)	Dilatancia (reacción a la agitación)	Tenacidad (consistencia entre el límite plástico)			
	Nula a ligera	Rápida a lenta	Nula	ML		
	Medio a alta	Nula a muy lenta	Medio	CL		
	Ligera a media	Lenta	Ligera	OL		
Limo y arcilla con límites de plasticidad de 50	Ligera a media	Lenta a nula	Ligera a media	MH		
	Alta a muy alta	Nula	Alta	CH		
	Medio a alta	Nula a muy lenta	Ligera a media	OH		
Suelos altamente orgánicos						
Fácilmente identificables por su color, olor, sensación esponjosa y frecuentemente por su textura fibrosa						

Figura 2.2.- Sistema Universal de clasificación de suelos. ASTM (American Society for Testing Material)

SISTEMA UNIFICADO DE CLASIFICACIÓN DE SUELOS Unified System of Classification of Soils (U.S.C.S.)									
José Manuel Recio López, 2006-07									
Tipos de suelos	Suelos muy orgánicos		$\frac{C_u}{C_c} < 0.75$ e identificables por inspección visual					PT Turba (peat)	
	Suelo de grano fino $R_{200} < 50\%$	$\frac{C_u}{C_c} < 0.75$	O Suelo orgánico (organic soil)		Diagrama de plasticidad I_p			$I_p < 0.73(\omega_L - 20)$ y $\omega_L \leq 50\%$	
								$I_p < 0.73(\omega_L - 20)$ y $\omega_L > 50\%$	
		$\frac{C_u}{C_c} \geq 0.75$	Suelo inorgánico: M limo (mud) C arcilla (clay)		Diagrama de plasticidad I_p			$I_p < 0.73(\omega_L - 20)$ y $\omega_L \leq 50\%$	
								$I_p < 0.73(\omega_L - 20)$ y $\omega_L > 50\%$	
	Resto de suelos	$R_4 \geq 0.5$	G Grava (gravel) % Grava > % Arena	$R_{200} < 88\%$		Diagrama de plasticidad I_p		$I_p < 0.73(\omega_L - 20)$ ó $I_p < 4$	
				$88\% < R_{200} < 95\%$		Diagrama de graduación: C_u, C_c		$I_p > 0.73(\omega_L - 20)$ ó $I_p < 4$	
				$R_{200} > 95\%$		Diagrama de graduación: C_u, C_c		$I_p > 0.73(\omega_L - 20)$ ó $I_p < 4$	
		$R_4 < 0.5$	S Arena (sand) % Arena > % Grava	$R_{200} < 88\%$		Diagrama de plasticidad I_p		$I_p < 0.73(\omega_L - 20)$ ó $I_p < 4$	
				$88\% < R_{200} < 95\%$		Diagrama de graduación: C_u, C_c		$I_p > 0.73(\omega_L - 20)$ ó $I_p < 4$	
				$R_{200} > 95\%$		Diagrama de graduación: C_u, C_c		$I_p > 0.73(\omega_L - 20)$ ó $I_p < 4$	

Figura 2.3.- Sistema Unificado de clasificación de suelos (USCS)

Arcilla de Bogotá	
Límites de Atterberg	
Límite Líquido, LL	62-65
Límite Plástico, LP	28-32
Índice de Plasticidad, IP	30-35
Peso específico relativo al agua (Gs)	2.6-2.7
Contenido de Arcilla (%)	61-63
Contenido de Limo (%)	32-35
Contenido de Arena (%)	4-5
Mineralogía Global	
Arcillas	75%
Feldespatos	3%
Cuarzo	22%
Mineralogía de la Arcilla	
Caolinita	55%
Esmectita	17%
Illita	15%
Clorita	13%
Sistema Unificado de Clasificación de Suelos	CH – Próximo a la línea A

Tabla 2.1.- Arcilla de Bogotá (Colombia) Tesis Ávila Álvarez, Guillermo (2004)

En las tablas 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4 se presentan ejemplos de suelos y sus características que han sido utilizados para estudiar el fenómeno de desecación y agrietamiento debidos a desecación. Con esto dejamos establecido el tipo de suelos sobre los cuales se estudia este tipo de procesos. En definitiva se trata de suelos arcillosos, arcillas limosas o limos arcillosos de baja o alta plasticidad.

Arcilla de Barcelona	
Límites de Atterberg	
Límite Líquido, LL	32
Límite Plástico, LP	16
Índice de Plasticidad, IP	16
Humedad residual (ω_r)	2.2%
Peso específico relativo al agua (Gs)	2.71
Partículas que pasan el tamiz de 75 μm	
Contenido de arcilla	10.5%
Contenido de limo	42.7%
Contenido de arena	46.8%
Sistema Unificado de Clasificación de Suelos	CU

Tabla 2.2.- Arcilla de Barcelona (España) Tesis Lakshmikantha, M.R. (2009)

Residuos mineros MOA-CUBA	
Límites de Atterberg	
Límite Líquido, LL	23-44
Límite Plástico, LP	21-40
Índice de Plasticidad, IP	3.1-11
Peso específico relativo al agua (Gs)	3.52-4.11
Contenido de arcilla	10%
Contenido de limo	70%
Contenido de arena	20%

Tabla 2.3.- Residuos mineros tesis Rodríguez Pacheco, R.L. (2002)

Arcilla de Werribee	
Límites de Atterberg	
Límite Líquido, LL	127
Límite Plástico, LP	26
Índice de Plasticidad, IP	101
Límite de Contracción	22
Peso específico relativo al agua (Gs)	2.66
Partículas que pasan el tamiz de 75 µm	96%
Contenido de arcilla	62%
Mineralogía	
Cuarzo	30%
Feldespatos (Albite)	8%
Illita	10%
Kaolinita	10%
Ca-smectita	42%

Tabla 2.4.- Arcilla de Werribee, Victoria, Australia. Nahlawi and Kodikara (2006)

Como se ve en las tablas solo se han estudiado un puñado de tipos de suelo. Del estudio de los resultados se concluye que existe la necesidad de ampliar el estudio a una mayor variedad de tipos de suelo puesto que esto influye de manera apreciable en el comportamiento cuantitativo frente a la desecación y agrietamiento.

De hecho por ejemplo de la observación directa de varios resultados de laboratorio se puede concluir que para que los suelos presentes “curling” (ver capítulo de resultados) es necesario que el suelo tenga una plasticidad elevada. Así se verá en el capítulo 6 que la arcilla de Werribee, Australia presenta un marcado proceso de curling frente a la muy reducida presencia de dicho fenómeno sobre la arcilla de Barcelona cuyos índices de plasticidad son respectivamente 16 y 101.

Capítulo 3

Procesos Físicos en Deseccación y Agrietamiento del Suelo

3.1 Deseccación en la naturaleza

La deseccación de suelos cohesivos es un fenómeno bastante común en todo el mundo. En la Figura 3.1 podemos ver dos ejemplos del aspecto final que presenta el suelo luego de la deseccación. Teniendo en mente que en determinado momento el mismo suelo presentaba un aspecto sano y uniforme (ver Figura 3.2) y se encontraba en estado parcialmente saturado, saturado o sobresaturado, podemos pensar en cuáles son los procesos físicos que se producen desde ese estado inicial al estado final que vemos en las fotografías.

En primer lugar podemos decir que el suelo inicialmente semi-saturado, saturado o sobresaturado se trata de un sistema termodinámico abierto. Esto significa que el sistema está en contacto con el medio ambiente que impone ciertas condiciones que lo harán evolucionar hasta alcanzar un estado de equilibrio cuyo aspecto final es el presentado en la Figura 3.1.

El principal efecto que produce el medio ambiente aportando calor y cierto estado de humedad es la evaporación del agua contenida en la masa de suelo. El ambiente no es el único factor de extracción de agua del sistema en estudio ya que puede verse la

presencia de vegetación que también contribuirá a disminuir con contenido de humedad a través de procesos de transpiración (extracción de humedad mediante sus



Figura 3.1.- Agrietamiento por desecación en suelos arcillosos. Río Grande, Méjico arriba; Lecho de un lago en Australia abajo.

raíces). El fenómeno combinado se denomina evapotranspiración y constituye un importante componente del ciclo y balance del agua.

Si el agua presenta determinado tipo de sustancia disueltas pueden aparecer también procesos químicos que produzcan pérdida de agua o incremento en las tensiones capilares (succión) que produzcan retracción y agrietamiento.

Las precipitaciones que se produzcan a lo largo del tiempo pueden contrarrestar los procesos de desecación e incluso invertirlos por completo humedeciendo las arcillas hasta saturarlas y quizás cerrando algunas o todas las grietas que se habían formado.



Figura 3.2.- Lodo que presenta tres estados de arriba hacia abajo en la foto. Sano y saturado, parcialmente saturado y agrietado y seco.

En el caso de lechos de lagos, se puede producir la total inundación del mismo en períodos de fuertes lluvias.

Como puede intuirse a esas alturas el proceso visto en la naturaleza es muy complejo y muy difícil de abordar. Afortunadamente en el campo de la geotécnica podemos prescindir de varios factores que producen la desecación. La transpiración de las plantas en general no se tendrá en cuenta lo cual simplifica en parte el tratamiento. Por otro lado en el contexto de esta tesina solo se tendrá en cuenta el proceso de desecación (un solo semi-ciclo) ya que no se abordará la posibilidad de humedecimiento. También y debido a que este proceso puede darse en condiciones isotermas se estudiará solo el problema hidro-mecánico y se descarta todo lo relacionado con los procesos químicos.

3.2 Deseccación en el laboratorio

Cuando estudiamos el fenómeno en el laboratorio, las condiciones en las que se produce el secado son por supuesto controladas. En la Figura 3.3 podemos ver un ejemplo de lo que sería un ensayo en una cámara ambiental (ver [Lakshmikantha, M.R. Phd Thesis, 2009](#)). En este caso la idea es mantener la temperatura y la humedad del ambiente de la cámara constante. Así la desecación se produce exclusivamente debido a que la muestra de suelo evoluciona hasta alcanzar el equilibrio con las condiciones de humedad que impone el ambiente.

3.3 Definiciones

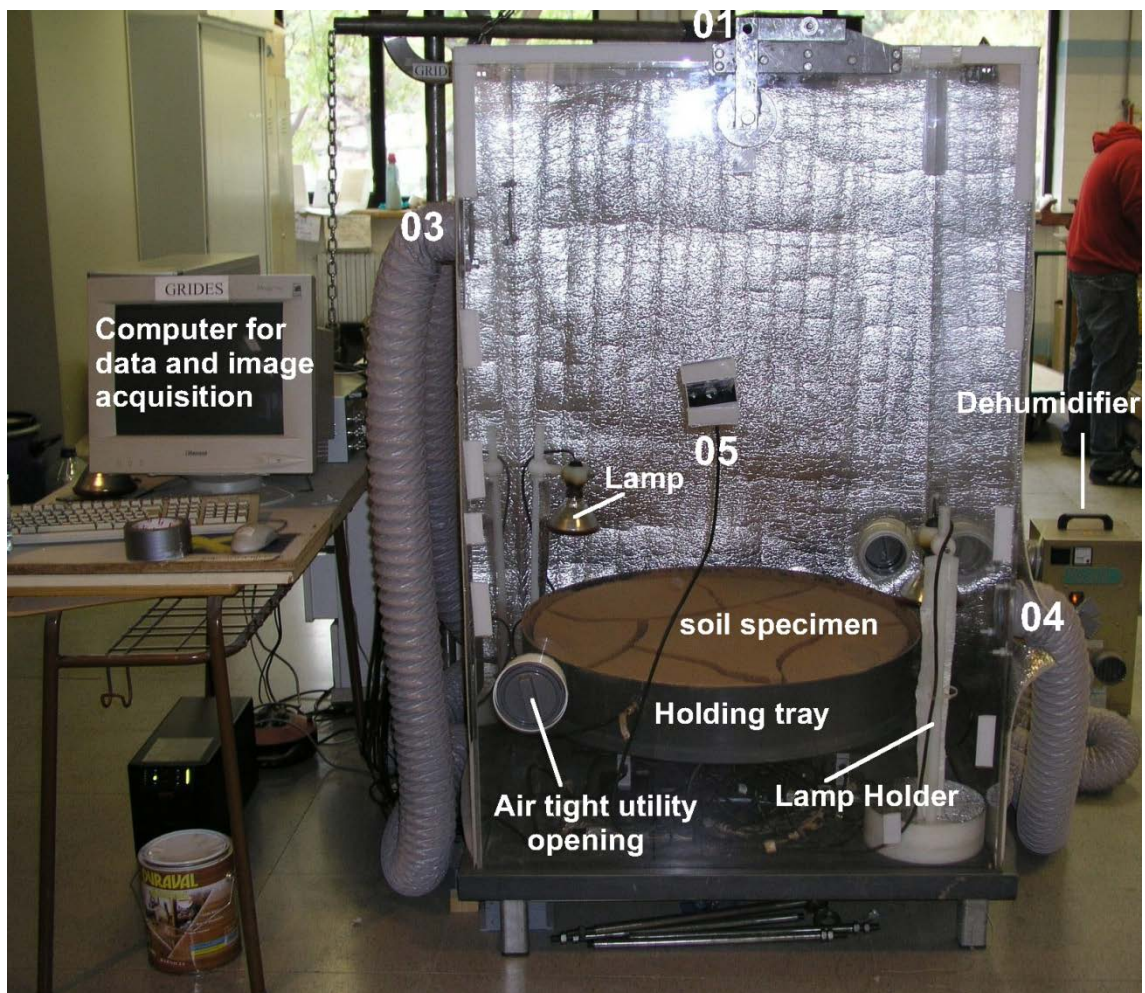


Figura 3.3.- Cámara ambiental en laboratorio Departamento de Ingeniería del Terreno UPC. De Lakshmikantha Phd Thesis (2009)

A lo largo del estudio del problema de desecación en suelos, distintos autores han intentado definir qué se entiende por desecación y agrietamiento debido a desecación.

A continuación se resumen las definiciones más importantes respecto del término agrietamiento e inicio de agrietamiento y se dan las referencias correspondientes.

3.3.1 Definiciones de agrietamiento

Las grietas son el resultado de un desequilibrio interno en la masa de suelo causado por la distribución no uniforme de la humedad, temperatura o la distribución de la energía de compactación durante la construcción (Fang, 1997).

Los suelos contraíbles a menudo se agrietan cuando se secan. El agrietamiento ocurre bajo diferentes condiciones y no pueden explicarse de la misma manera (Towner, 1987b).

El inicio del agrietamiento y propagación en suelos es un problema complejo que involucra mecanismos de localización de deformaciones y flujo de agua en medios saturados y no saturados, así como también su interacción (Prat et al., 2002).

El agrietamiento en suelos sometidos a desecación está controlado por la succión y por las propiedades del suelo tal como el módulo a compresión, el módulo de Poisson, la resistencia al corte, la resistencia a tracción y la energía superficial específica (Morris et al., 1994).

El agrietamiento es un problema de fractura, el cual no es abordado adecuadamente mediante una aproximación donde la falla se define en términos de resistencia a tracción (Harrison y Hardin, 1994).

La respuesta mecánica de la arcilla viene dada por su fábrica así como también por sus defectos o discontinuidades que pueden existir en el material. Estos defectos, a menudo en forma de grietas e inclusiones, desembocan en bandas de corte que crecen desde las grietas y forman una zona en la cual la deformación es localizada (Saada et al., 1994a).

3.3.2 Definiciones de inicio de agrietamiento

Se ha visto que las grietas comienzan en el centro de la capa de suelo y se propagan hacia la superficie o hacia el fondo con velocidad no uniforme (Corte y Higashi, 1960).

Las grietas se inicial generalmente en la superficie de mayor tensión (a menudo en o cerca de la superficie) y se propagan hacia el interior del medio donde la tensión disminuye y en último caso pasan a ser de compresión (Lachenbruch, 1961).

El desarrollo de tensiones de tracción significativas causa grietas por tracción en zonas bien definidas en suelos frágiles (Lee et al., 1988).

El suelo se seca generalmente hacia abajo desde la superficie, donde la matriz de succión es generalmente mayor y las tensiones debidas al peso propio son cero. Las micro-fisuras que están presentes en la masa de suelo en forma de vacíos entre partículas se encuentran presentes también en la superficie. Así, las condiciones para que las grietas crezcan son más favorables en la superficie del suelo (Morris et al., 1992).

Durante la desecación las grietas comienzan desde el fondo y se propagan verticalmente hacia la superficie y lateralmente hacia las grietas adyacentes (Weinberger, 1999).

3.4 Modelo conceptual

Como se ha visto el problema de desecación involucra a muchos campos de la ciencia y para aclarar ideas es bueno definir qué tipo de problema de desecación estamos abordando aquí. Analizamos los procesos de desecación y agrietamiento en suelo arcillosos que presentan agrietamiento del orden de centímetros de profundidad y separación entre sí. Nos centramos en la desecación producida por diferencias en contenido de humedad entre el ambiente y la masa de suelo. Contracción y agrietamiento producidos por la generación de tensiones de succión en la masa de suelo que se traducen en tensiones de tracción capaces de alcanzar la resistencia del material. Se desprecian los efectos de la temperatura y se modela el fenómeno mediante dos grupos de ecuaciones. Por un lado el fenómeno hidráulico y por otro el problema mecánico. El problema hidromecánico resuelve el problema de la contracción del suelo debido a desecación. El problema de la iniciación y propagación de las grietas se debería resolver utilizando principios de la Mecánica de Fractura Elástica Lineal (Prat et al. 2008 IACMAG) utilizando la Mecánica de Fractura Lineal Elástica, pero esto queda fuera del alcance de la presente tesina.

Capítulo 4

Modelo Hidromecánico

En este capítulo se presenta la formulación teórica del modelo hidromecánico adoptado para plantear el problema de desecación del suelo. El capítulo se divide en tres apartados que abarcan respectivamente la formulación de las ecuaciones de gobierno del problema, las ecuaciones constitutivas mecánicas y finalmente las ecuaciones constitutivas hidráulicas. Este modelo es una evolución de un modelo simplemente mecánico que aborda el mismo problema de una forma más simplificada considerando solo la componente mecánica del problema ([Levatti, 2008](#)).

Posteriormente en el siguiente capítulo se presentará la resolución del problema mediante el método de los elementos finitos.

4.1 Formulación de modelo hidromecánico para suelos no saturados

En esta tesina de máster se considera que el marco de trabajo a lo largo de todo el proceso cae en el dominio de la mecánica de suelos no saturados. A pesar de que se parte del suelo saturado y que al principio este permanece en esta condición, podemos aplicar dicho criterio considerando que en los primeros momentos el agua de los poros está sometida a tracciones mientras esta ocupa todo el espacio entre partículas ([Levatti, et al. 2007](#)).

4.1.1 Hipótesis

Se presentan a continuación las hipótesis adoptadas para la formulación del presente problema:

- 1.- Se consideran fenómenos isotermos, es decir, las tres fases están a igual temperatura.
- 2.- Se asumen que las deformaciones son pequeñas.
- 3.- Se considera que las deformaciones son lentas, por lo que podemos despreciar las aceleraciones (modelo cuasi-estático).
- 4.- Se abordará el caso de formulación acoplada hidromecánica de las ecuaciones básicas de balance: conservación de masa de agua y equilibrio. Aunque se implementará una solución tipo desacoplada resolviendo por separado el problema hidráulico primero y luego el problema mecánico.
- 5.- Se considera el medio poroso parcialmente saturado, en los poros hay dos fases: una líquida (agua) y otra gaseosa (aire seco y vapor de agua).
- 6.- Se supone que no hay resistencia al flujo de aire y vapor de agua en los poros por lo que la presión de la fase gaseosa permanece igual a la presión atmosférica (adoptamos $P_{atm} = 0$ MPa).
- 7.- No se considera los fenómenos de cambio de fases del agua (disolución de agua en el aire ni condensación del vapor de agua)
- 8.- Las variables de estado son: los desplazamientos de la matriz sólida \mathbf{u} ; la presión de poro de agua u_w .
- 9.- Se usará el método de los elementos finitos para la discretización espacial y el método de diferencias finitas para la discretización temporal.

4.1.1.1 Variables de Estado¹

El comportamiento constitutivo de los suelos no saturados ha sido estudiado principalmente a través de la experimentación durante décadas. Inicialmente [Bishop \(1959\)](#) sugirió la existencia de una tensión efectiva, emparentada con la de los suelos saturados, definida como:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - u_a \delta_{ij} + \chi(u_a - u_w) \delta_{ij} \quad \text{ó} \quad \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - u_a \mathbf{1} + \chi(u_a - u_w) \mathbf{1} \quad [4.1]$$

¹ En este capítulo, a partir de aquí, se presentan todas las ecuaciones en notación de Einstein (o de índices) y en notación compacta. Esto debido a que una y otra tienen ventajas y limitaciones a la hora de interpretarlas. Usando las dos no quedan lugar a dudas.

Donde σ es la tensión total. u_a y u_w la presión de aire y agua respectivamente y χ es un parámetro que depende fuertemente del grado de saturación, la historia de tensiones y de la estructura del suelo.

El concepto de tensión efectiva fue luego cuestionado por Jennings y Burland (1962), Bishop y Blight (1963), Aitchison (1965), Blight (1965) y Burland (1965).

Bishop y Blight (1963), Blight (1965) y Burland (1965) sugirieron la conveniencia de utilizar como variables de tensión: a la tensión neta $(\sigma - u_a \mathbf{1})$ y la succión $(u_a - u_w)$.

Mediante el “null test” (Fredlund y Morgenstern, 1977) mostraron que el mencionado par de tensiones son de hecho un sistema que representa bien el comportamiento de los suelos parcialmente saturados. Así:

$$\sigma_{ij}^{neta} = \sigma_{ij} - u_a \delta_{ij} (*) \quad \text{ó} \quad \sigma^{neta} = \sigma - u_a \mathbf{1} (*) \quad [4.2]$$

$$s = u_a - u_w (*) \quad [4.3]$$

Donde: $\mathbf{1} \equiv \delta_{ij}$, es el delta de Kronecker.

Deformaciones infinitesimales:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{ó} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}) \equiv \mathbf{L} \mathbf{u} \quad [4.4]$$

El operador ∇^s , se denomina gradiente simétrico y se define tal como muestra la expresión de la deformación infinitesimal, es decir: $\nabla^s \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u})$, donde \mathbf{u} , puede ser una magnitud escalar, vectorial o tensorial.

*Para este problema, las tensiones $\sigma(\mathbf{x}, t)$, las deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$ y los desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ son función de la posición y del tiempo. También son función de la posición y del tiempo, la presión de poros de agua $u_w(\mathbf{x}, t)$, la presión de poro de aire $u_a(\mathbf{x}, t)$, el grado de saturación $S_r(\mathbf{x}, t)$ y por supuesto la succión $s(\mathbf{x}, t)$. Por simplificar la escritura de las ecuaciones muchas veces no se aclara esta cuestión.

4.1.1.2 Ecuaciones de Gobierno

La ecuación de balance de momento lineal (o equilibrio) en términos de tensiones totales es:

$$(\sigma_{ij} - u_a)_{,j} + u_{a,i} + \rho g_i = 0 \quad \text{ó} \quad \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} - u_a) + \nabla u_a + \rho \mathbf{g} = 0 \quad [4.5]$$

Donde $\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} - u_a)$, indica divergencia del tensor de tensiones netas, con

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right]^T \quad \text{o también} \quad \text{div}(\boldsymbol{\sigma} - u_a).$$

Además la densidad del medio multifase se calcula mediante la expresión:

$$\rho = (1 - n)\rho^s + nS_r\rho^w \quad [4.6]$$

Donde $n = V_p / V_T$, es la porosidad, V_p es el volumen de las partículas solidas, V_T es el volumen total del sistema; ρ^s es la densidad de las partículas de suelo y ρ^w , es la densidad del agua y S_r es el grado de saturación del agua.

La ecuación de balance de masa de agua es:

$$(\rho^w q_i)_{,i} + \frac{\partial}{\partial t}(\rho^w n S_r) = 0 \quad \text{ó} \quad \text{div}(\rho^w \mathbf{q}) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho^w n S_r) = 0 \quad [4.7]$$

Si consideráramos que el agua es incompresible, esto implicaría densidad constante por lo que podemos reescribir la ecuación anterior:

$$q_{i,i} + \frac{\partial}{\partial t}(n S_r) = 0 \quad \text{ó} \quad \text{div}(\mathbf{q}) + \frac{\partial}{\partial t}(n S_r) = 0 \quad [4.8]$$

La ecuación de Darcy es:

$$\begin{aligned}
 q_i &= -K_{ij}^P(S_r)(u_{w,j} - \rho^w g_j) = -K_{ij}^P(S_r)u_{w,j} + K_{ij}^P(S_r)\rho^w g_j \\
 \mathbf{q} &= -\mathbf{K}^P(S_r) \cdot (\nabla u_w - \rho^w \mathbf{g}) = -\mathbf{K}^P(S_r) \cdot \nabla u_w + \mathbf{K}^P(S_r) \cdot \rho^w \mathbf{g}
 \end{aligned} \quad [4.9]$$

La ecuación de continuidad más ecuación de Darcy, queda:

$$\begin{aligned} & \left[-K_{ij}^P(S_r) u_{w,j} \right]_{,i} + \left[K_{ij}^P(S_r) \rho^w g_j \right]_{,i} + S_r \frac{\partial n}{\partial t} + n \frac{\partial S_r}{\partial t} = 0 \\ & \text{div} \left[-\mathbf{K}^P(S_r) \cdot \nabla u_w \right] + \text{div} \left[\rho^w \mathbf{K}^P(S_r) \cdot \mathbf{g} \right] + S_r \frac{\partial n}{\partial t} + n \frac{\partial S_r}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad [4.10]$$

Vamos a introducir una pequeña incongruencia aquí. Por hipótesis el agua es incompresible y por ello su densidad se considera constante, pero a la ecuación de continuidad vamos a agregarle un término que representa la compresibilidad del agua y que lo agregamos por sus características de dar estabilidad numérica al problema. De todas formas su valor es pequeño, ya que la compresibilidad del agua K^w es muy grande. Que estas consideraciones obtenemos:

$$\begin{aligned} & \left[-K_{ij}^P(S_r) u_{w,j} \right]_{,i} + \left[K_{ij}^P(S_r) \rho^w g_j \right]_{,i} + S_r \frac{\partial n}{\partial t} + n \frac{\partial S_r}{\partial t} + \frac{n S_r}{K^w} \frac{\partial u_w}{\partial t} = 0 \\ & \text{div} \left[-\mathbf{K}^P(S_r) \cdot \nabla u_w \right] + \text{div} \left[\rho^w \mathbf{K}^P(S_r) \cdot \mathbf{g} \right] + S_r \frac{\partial n}{\partial t} + n \frac{\partial S_r}{\partial t} + \frac{n S_r}{K^w} \frac{\partial u_w}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad [4.11]$$

Habrà que tener en cuenta mas adelante que $n = \varepsilon_v$.

Teniendo en cuenta que el factor $\frac{\partial S_r}{\partial t} = \frac{\partial S_r}{\partial \sigma^{neta}} \frac{\partial \sigma^{neta}}{\partial t} + \frac{\partial S_r}{\partial u_w} \frac{\partial u_w}{\partial t}$, resulta:

$$\begin{aligned} & \text{div} \left[-\mathbf{K}^P(S_r) \cdot \nabla u_w \right] + \text{div} \left[\rho^w \mathbf{K}^P(S_r) \cdot \mathbf{g} \right] + \\ & + S_r \frac{\partial n}{\partial t} + n \frac{\partial S_r}{\partial \sigma^{neta}} \frac{\partial \sigma^{neta}}{\partial t} + n \frac{\partial S_r}{\partial u_w} \frac{\partial u_w}{\partial t} + \frac{n S_r}{K^w} \frac{\partial u_w}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad [4.12]$$

En nuestro caso el grado de saturación solo depende de la presión de poros y no de la tensión neta, así:

$$\frac{\partial S_r}{\partial t} = \frac{\partial S_r}{\partial u_w} \frac{\partial u_w}{\partial t}$$

Con lo cual nos queda:

$$\text{div} \left[-\mathbf{K}^P(S_r) \cdot \nabla u_w \right] + \text{div} \left[\rho^w \mathbf{K}^P(S_r) \cdot \mathbf{g} \right] + S_r \frac{\partial n}{\partial t} + n \frac{\partial S_r}{\partial u_w} \frac{\partial u_w}{\partial t} + \frac{n S_r}{K^w} \frac{\partial u_w}{\partial t} = 0 \quad [4.13]$$

Como el grado de saturación es función de la presión de poros, podemos escribir la ecuación anterior de forma de ver claramente los términos no lineales:

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{div} \left[-\mathbf{K}^P(u_w) \cdot \nabla u_w \right] + \operatorname{div} \left[\rho^w \mathbf{K}^P(u_w) \cdot \mathbf{g} \right] + \\
 & + S_r(u_w) \frac{\partial n}{\partial t} + n \frac{\partial S_r(u_w)}{\partial u_w} \frac{\partial u_w}{\partial t} + \frac{n S_r(u_w)}{K^w} \frac{\partial u_w}{\partial t} = 0
 \end{aligned} \quad [4.14]$$

4.1.1.3 Condiciones Iniciales

Deben ser conocidos los campos de desplazamientos y presiones de agua para el instante de referencia $t_0 = 0$.

$u_i = u_i^0$	ó	$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$	en Ω y Γ	[4.15]
		$u_w = p_0$	en Ω y Γ	[4.16]

Donde Ω , es el dominio y Γ , es el contorno

u_i ó \mathbf{u} es el campo de desplazamientos y u_i^0 ó \mathbf{u}^0 es el campo de desplazamientos en el tiempo inicial $t_0 = 0$; p_0 es la presión de poros inicial en el dominio de estudio.

4.1.1.4 Condiciones de Contorno

$u_i = \hat{u}_i$	ó	$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}$	en Γ	[4.17]
		$u_w = \hat{p}$	en Γ	[4.18]

4.1.1.5 Condiciones de Contorno de Tracción

$$(\sigma_{ij} - u_a) n_j = (\sigma_{ji} - u_a) n_j = T_i \quad \text{ó} \quad (\boldsymbol{\sigma} - u_a) \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \text{ en } \Gamma \quad [4.19]$$

$$\mathbf{I}^T (\boldsymbol{\sigma} - u_a) - \bar{\mathbf{t}} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma \quad [4.20]$$

4.1.1.6 Condición de Contorno de Flujo

$$K_{ij}^P(S_r)(-u_{w,j} + \rho^w g_j) n_i = q^w \quad \text{ó} \quad \mathbf{K}^P(S_r)(-\nabla u_w + \rho^w \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n} = q^w \quad \text{en } \Gamma \quad [4.21]$$

Donde q^w , es el flujo impuesto de masa de agua normal al contorno. Además el

operador gradiente $\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right]^T$, puede escribirse además $\nabla p \equiv \operatorname{grad}(p)$.

4.2 Modelo Constitutivo Mecánico

La mayor diferencia entre otros materiales y el suelo radica en la relación tensión-deformación que en suelos es extremadamente compleja. Para obtener modelos constitutivos prácticos, es necesario recurrir a simplificaciones.

Nos proponemos aquí utilizar un modelo constitutivo elástico no lineal. Los modelos elásticos basados en la mecánica de los medios continuos se clasifican generalmente en:

Elasticidad Lineal (Ley de Hooke generalizada)

Elasticidad de Cauchy

Híper elasticidad (o Elasticidad de Green)

Hipo elasticidad

El modelo que se propone aquí será elástico no lineal de Cauchy basado en el concepto de superficies de estado. Matemáticamente la relación se puede expresar:

$$\sigma_{ij} = F_{ij}(\varepsilon_{kl}) \quad \text{ó} \quad \varepsilon_{ij} = F_{ij}(\sigma_{kl}) \quad [4.22]$$

Las superficies de estado (Matyas and Radhakrishna 1968); (Lloret y Alonso 1985) son superficies que se obtienen experimentalmente (ver Figura 4.1) y que resultan de interpolar varios puntos en un espacio $p' - s - e$ (Tensión neta – Succión – Relación de Vacíos) y para nuestro caso en forma incremental es:

$$\Delta e = a_1 \Delta \ln(p' + a_4) + a_2 \Delta \ln\left(\frac{s + p_{ref}}{p_{ref}}\right) + a_3 \Delta \left[\ln(p' + a_4) \ln\left(\frac{s + p_{ref}}{p_{ref}}\right) \right] \quad [4.23]$$

Donde:

$\Delta e = e_f - e_0$: Es el incrementos de la relación de vacíos [(-) si disminuye el volumen; (+) si el volumen aumenta].

$p' = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$: Es la tensión media neta [compresiones (+)]

s : Succión (+)

a_1, a_2, a_3 y a_4 : Parámetros constantes de la superficie de estado

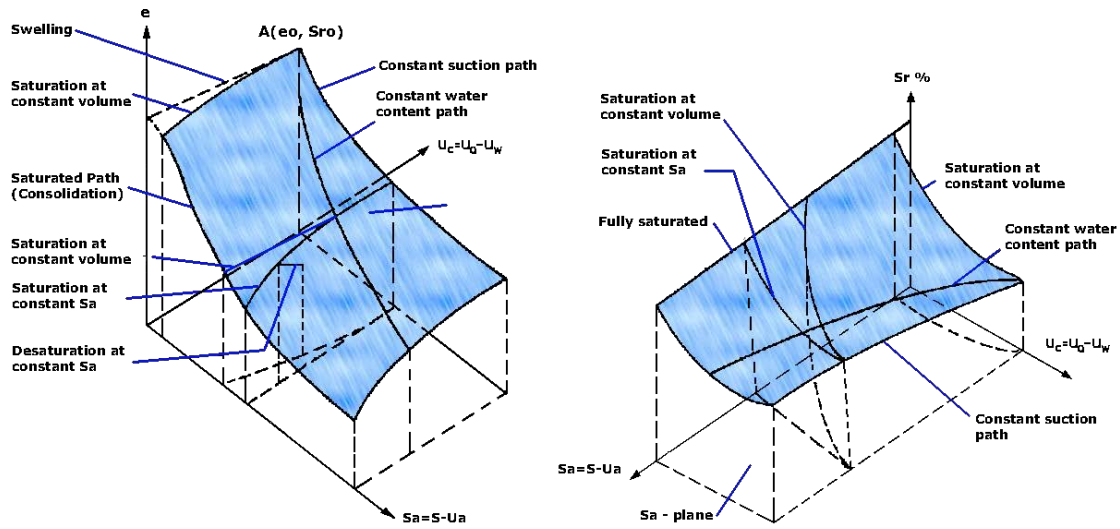


Figura 4.1.- Superficies de Estado, de Matyas and Radhakrishna 1968 [30]

Los incrementos de la [4.23] representan exactamente lo siguiente:

$$\Delta \ln(p' + a_4) = \ln(p'_f + a_4) - \ln(p'_0 + a_4) = \ln \left[\frac{(p'_f + a_4)}{(p'_0 + a_4)} \right] \quad [4.24]$$

$$\Delta \ln \left(\frac{s + p_{ref}}{p_{ref}} \right) = \ln \left(\frac{s_f + p_{ref}}{p_{ref}} \right) - \ln \left(\frac{s_0 + p_{ref}}{p_{ref}} \right) = \ln \frac{\frac{s_f + p_{ref}}{p_{ref}}}{\frac{s_0 + p_{ref}}{p_{ref}}} = \ln \frac{s_f + p_{ref}}{s_0 + p_{ref}} \quad [4.25]$$

$$\Delta \left[\ln(p' + a_4) \ln \left(\frac{s + p_{ref}}{p_{ref}} \right) \right] = \ln(p'_f + a_4) \ln \left(\frac{s_f + p_{ref}}{p_{ref}} \right) - \ln(p'_0 + a_4) \ln \left(\frac{s_0 + p_{ref}}{p_{ref}} \right) \quad [4.26]$$

Esta expresión dice que a incrementos de tensiones netas y/o succiones, corresponden incrementos en la relación de vacíos.

La deformación volumétrica del suelo se expresa:

$$\varepsilon_v = - \frac{\Delta e}{1 + e_0} \quad [4.27]$$

El signo negativo obedece a que si disminuye la relación de vacíos, disminuye el volumen y como se trata de compresión nos queda un valor positivo de deformación volumétrica en compresión según la convención de signos adoptada.

Veremos luego que para generalizar a esta relación la podremos expresar de la siguiente forma:

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \quad [4.28]$$

Donde D_{ijkl} , es un tensor de 4º orden tangente y se puede representar mediante una matriz de coeficientes variables cuyas expresiones en función de la succión o el grado de saturación y de la tensión neta se obtienen calculando las pendientes de superficie de estado.

El hecho de que el comportamiento constitutivo del suelo sea muy complejo hace que las relaciones propuestas tengan un rango de aplicación muy acotado. Este caso no es la excepción, así el modelo constitutivo que se plantea, está pensado para procesos de desecación, donde se producen deformaciones edométricas o a lo sumo triaxiales y siempre pensando en un solo semiciclo de desecación.

4.2.1 Variables de Estado

Cuando debemos modelar el comportamiento de materiales que tienen varias fases como es el caso de los suelos. La idea es pensar en varios medios continuos que conviven en un mismo espacio. Así en el caso del suelo no saturado que consta de tres fases, fase sólida (granos de suelo), fase líquida (agua) y fase gaseosa (vapor de agua + aire seco), tendremos tres medios continuos.

Lo primero que haremos será definir las variables de tensiones de trabajo, estas serán dos, la tensión neta (tensión total en exceso de la presión de aire) y la succión (presión de aire menos presión de agua) definidas de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} \text{Tensión} \\ \text{neta:} \end{array} \quad \sigma_{ij}^{neta} = \sigma_{ij} - u_a \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad d\sigma_{ij}^{neta} = d\sigma_{ij} - du_a \delta_{ij} \quad [4.29]$$

$$\text{Succión:} \quad s = u_a - u_w \quad \Rightarrow \quad ds = du_a - du_w \quad [4.30]$$

Donde u_a es la presión del aire, u_w es la presión de poro de agua, σ_{ij} es el tensor de tensiones totales y $du_a, du_w, d\sigma_{ij}$ sus respectivos incrementos diferenciales y δ_{ij} es el delta de Kronecker.

Capítulo 4

Pensando en una porción de suelo no saturado, si aplicamos una deformación al conjunto la el incremento de deformación total será igual a la suma de los incrementos de deformaciones producidos por las tensiones netas y la succión, así:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{neta} + d\varepsilon_{ij}^s = C_{ijkl}(K, G)d\sigma_{kl}^{neta} + h_{ij}(K^s)ds \quad [4.31]$$

Donde, $C_{ijkl}(K, G)$, es el tensor de flexibilidad de 4º orden tangente (Compliance), por tratarse de una relación no lineal y $h_{ij}(K^s)$, es un tensor de segundo orden que contiene el modulo de deformación volumétrica relacionado con la succión. Despejando podemos obtener los incrementos de tensión neta en función de los incrementos de deformación total y de los incrementos de succión, esto es:

$$d\sigma_{kl}^{neta} = [C_{ijkl}(K, G)]^{-1} (d\varepsilon_{ij} - h_{ij}ds) = D_{ijkl}(K, G)(d\varepsilon_{ij} - h_{ij}ds) \quad [4.32]$$

Donde $D_{ijkl}(K, G)$ es el tensor de rigidez (Stiffness) tangente y es la inversa de $C_{ijkl}(K, G)$ matriz de flexibilidad (Compliance) también tangente. Ver la forma de estos tensores en el anexo donde se escriben todas estas ecuaciones en forma matricial.

Para el caso elástico lineal K, G y K^s , serán constantes del material y formarán parte del tensor de rigidez y/o flexibilidad de la relación tensión-deformación y será por supuesto constante. Para el caso no lineal tenemos que obtener expresiones de esos coeficientes en función de la tensión neta y de la succión. Para ello utilizamos el concepto de “Superficies de Estado” que está basado en ensayos de laboratorio para condiciones edométricas o triaxiales cuya expresión más exacta viene dada por:

$$\varepsilon_v = -\frac{\Delta e}{1+e_0} = \left(-\frac{1}{1+e_0} \right) \left\{ a_1 \Delta \ln(p' + a_4) + a_2 \Delta \ln \left(\frac{s + p_{ref}}{p_{ref}} \right) + a_3 \Delta \left[\ln(p' + a_4) \ln \left(\frac{s + p_{ref}}{p_{ref}} \right) \right] \right\} \quad [4.33]$$

De $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{neta} + \varepsilon_{ij}^s \Rightarrow d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{neta} + d\varepsilon_{ij}^s$, contrayendo índices podemos llegar a que:

$d\varepsilon_{ii} = d\varepsilon_{ii}^{neta} + d\varepsilon_{ii}^s$, es decir, $d\varepsilon_v = d\varepsilon_v^{neta} + d\varepsilon_v^s$ la deformación volumétrica total es igual a la deformación volumétrica producida por la tensión neta mas la deformación volumétrica producida por la succión. Ahora bien, derivando esta última expresión respecto de la tensión neta primero y luego de la succión podemos obtener expresiones de los módulos elásticos volumétricos tangentes, así, partiendo de que las

deformaciones volumétricas debidas a tensiones netas y a succión son respectivamente:

$$d\varepsilon_v^{neta} = K_t(p', s)dp' \text{ y } d\varepsilon_v^s = \frac{ds}{K_t^s(p', s)} \quad [4.34]$$

El incremento de deformación volumétrica total será:

$$d\varepsilon_v = d\varepsilon_v^{neta} + d\varepsilon_v^s = K_t(p', s)dp' + \frac{ds}{K_t^s(p', s)} \quad [4.35]$$

Diferenciando la expresión de la superficie de estado:

$$d\varepsilon_v = \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial p'} dp' + \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial s} ds = K_t(p', s)dp' + \frac{1}{K_t^s(p', s)} ds \quad [4.36]$$

De donde se puede ver que:

$$K_t(p', s) = \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial p'} \quad \text{y} \quad \frac{1}{K_t^s(p', s)} = \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial s} \quad [4.37]$$

Primero escribimos la ecuación de la deformación volumétrica aplicando un incremento desde valores iniciales a un valor final genérico de succión y tensión media neta:

$$\varepsilon_v = -\frac{\Delta e}{1+e_0} = \left(-\frac{1}{1+e_0} \right) \left\{ \begin{aligned} &a_1 [\ln(p' + a_4) - \ln(p'_0 + a_4)] + a_2 \left[\ln\left(\frac{s + p_{ref}}{p_{ref}}\right) - \ln\left(\frac{s_0 + p_{ref}}{p_{ref}}\right) \right] + \\ &+ a_3 \left[\ln(p' + a_4) \ln\left(\frac{s + p_{ref}}{p_{ref}}\right) - \ln(p'_0 + a_4) \ln\left(\frac{s_0 + p_{ref}}{p_{ref}}\right) \right] \end{aligned} \right\} \quad [4.38]$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\varepsilon_v = \left(-\frac{1}{1+e_0} \right) \left\{ \begin{aligned} &-a_1 \ln(p'_0 + a_4) - a_2 \ln\left(\frac{s_0 + p_{ref}}{p_{ref}}\right) - a_3 \ln(p'_0 + a_4) \ln\left(\frac{s_0 + p_{ref}}{p_{ref}}\right) + \\ &+ a_1 \ln(p' + a_4) + a_2 \ln\left(\frac{s + p_{ref}}{p_{ref}}\right) + a_3 \ln(p' + a_4) \ln\left(\frac{s + p_{ref}}{p_{ref}}\right) \end{aligned} \right\} \quad [4.39]$$

Veamos estas derivadas:

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial p'} = \left(-\frac{1}{1+e_0} \right) \left[\frac{a_1}{p'+a_4} + \frac{a_3}{p'+a_4} \ln \left(\frac{s+p_{ref}}{p_{ref}} \right) \right] \quad [4.40]$$

Derivando respecto de la succión:

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial s} = \left(-\frac{1}{1+e_0} \right) \left[\frac{a_2}{s+p_{ref}} + \frac{a_3}{s+p_{ref}} \ln(p'+a_4) \right] \quad [4.41]$$

Y finalmente, simplificando:

$$\frac{1}{K_t(p', s)} = \frac{(1+e_0)(p'+a_4)}{-a_1 - a_3 \ln \frac{s+p_{ref}}{p_{ref}}} \quad [4.42]$$

$$K_t^s(p', s) = \frac{(1+e_0)(s+p_{ref})}{-a_2 - a_3 \ln(p'+a_4)} \quad [4.43]$$

Para el caso en que se suponga que la presión del aire será siempre igual a la presión atmosférica y tomando esta igual a cero ($u_a = 0$), y llamando a la presión de agua u_w , las variables de tensión quedan:

$$\text{Tensión neta:} \quad \sigma_{ij}^{neta} = \sigma_{ij} \quad \Rightarrow \quad d\sigma_{ij}^{neta} = d\sigma_{ij} \quad [4.44]$$

$$\text{Tensión media neta:} \quad \sigma_v^{neta} = p' \quad \Rightarrow \quad d\sigma_v^{neta} = dp' \quad [4.45]$$

$$\text{Succión:} \quad s = -u_w \quad \Rightarrow \quad ds = -du_w \quad [4.46]$$

De esta manera la expresión de la deformación volumétrica en función de la superficie de estado queda:

$$\varepsilon_v = -\frac{\Delta e}{1+e_0} = \left(-\frac{1}{1+e_0} \right) \left\{ a_1 \ln(p'+a_4) + a_2 \ln \left(\frac{-u_w + p_{ref}}{p_{ref}} \right) + a_3 \left[\ln(p'+a_4) \ln \left(\frac{-u_w + p_{ref}}{p_{ref}} \right) \right] \right\} \quad [4.47]$$

Y los módulos derivados de esta función serán:

$$\text{Modulo volumétrico:} \quad \frac{1}{K_t(p', u_w)} = \frac{(1+e_0)(p'+a_4)}{-a_1 - a_3 \ln \frac{-u_w + p_{ref}}{p_{ref}}} \quad [4.48]$$

Modulo de succión:

$$K_t^s(p', u_w) = \frac{(1+e_0)(-u_w + p_{ref})}{-a_2 - a_3 \ln(p' + a_4)} \quad [4.49]$$

Adoptando un coeficiente de Poisson constante queda definido el módulo de corte tangente de la siguiente manera:

Modulo de corte:

$$G_t = \frac{3K_t(1-2\nu)}{2(1+\nu)} = \frac{3(1-2\nu)(1+e_0)(p'_0 + a_4)}{2(1+\nu) \left(-a_1 - a_3 \ln \frac{-u_w + p_{ref}}{p_{ref}} \right)} \quad [4.50]$$

La deformación volumétrica debida a succión (en este caso presión de poro) queda:

$$d\varepsilon_v^s = \frac{-du_w}{K_t^s(p', s)} \quad [4.51]$$

Y la relación tensión deformación:

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}(d\varepsilon_{kl} + \frac{du_w}{3K_t^s} \delta_{kl}) = D_{ijkl}(d\varepsilon_{kl} - \frac{d\varepsilon_v^s}{3} \delta_{kl}) \quad [4.52]$$

En definitiva de forma más general la relación tensión deformación para suelos no saturados, basada en superficies de estado queda:

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}(d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^s) \quad \text{ó} \quad d\sigma = \mathbf{D}(d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^s) = \mathbf{D} \left(d\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{m} \frac{du_w}{3K_t^s} \right) \quad [4.53]$$

Siendo:

σ_{ij} : Tensor de tensiones totales o netas, para el caso es igual por ser $u_a = p_{atm} = 0$ y $d\sigma_{ij}$, su diferencial.

ε_{kl} : Tensor de deformaciones totales y $d\varepsilon_{kl}$ su diferencial.

ε_{kl}^s : Tensor de deformaciones debido a succión, es un tensor esférico, donde:

$$\varepsilon_{11}^s = \varepsilon_{22}^s = \varepsilon_{33}^s = \frac{\varepsilon_v^s}{3} = \frac{p}{3K_t^s} \text{ y } \varepsilon_{12}^s = \varepsilon_{13}^s = \varepsilon_{23}^s = 0 \text{ y } d\varepsilon_{kl}^s \text{ es su diferencial.}$$

4.2.2 Forma Matricial de la Relación Tensión-Deformación

La forma matricial de la relación tensión deformación elástica no lineal basada en la superficie de estado, se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} d(\sigma_x - u_a) \\ d(\sigma_y - u_a) \\ d(\sigma_z - u_a) \\ d\tau_{xy} \\ d\tau_{xz} \\ d\tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_x - \frac{1}{3K^s}d(u_a - u_w) \\ d\varepsilon_y - \frac{1}{3K^s}d(u_a - u_w) \\ d\varepsilon_z - \frac{1}{3K^s}d(u_a - u_w) \\ d\gamma_{xy} \\ d\gamma_{xz} \\ d\gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad [4.54]$$

Donde el primer vector columna a la izquierda de la igualdad representa al tensor diferencial de tensiones netas en la masa de suelo. A la derecha de la igualdad vemos la matriz de rigidez que multiplica al tensor diferencial de deformaciones netas igual a la diferencia entre las deformaciones totales y las debidas a succión.

Con la hipótesis de que la presión de aire se mantiene igual a cero: $u_a = 0$, nos queda:

$$\begin{bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\sigma_z \\ d\tau_{xy} \\ d\tau_{xz} \\ d\tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_x + \frac{1}{3K^s}du_w \\ d\varepsilon_y + \frac{1}{3K^s}du_w \\ d\varepsilon_z + \frac{1}{3K^s}du_w \\ d\gamma_{xy} \\ d\gamma_{xz} \\ d\gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad [4.55]$$

Si invertimos la relación para obtener las deformaciones en función de las tensiones y de la succión:

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_x + \frac{1}{3K^s} du_w \\ d\varepsilon_y + \frac{1}{3K^s} du_w \\ d\varepsilon_z + \frac{1}{3K^s} du_w \\ d\gamma_{xy} \\ d\gamma_{xz} \\ d\gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} \frac{3K+G}{KG} & -\frac{1}{18} \frac{3K-2G}{KG} & -\frac{1}{18} \frac{3K-2G}{KG} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{18} \frac{3K-2G}{KG} & \frac{1}{9} \frac{3K+G}{KG} & -\frac{1}{18} \frac{3K-2G}{KG} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{18} \frac{3K-2G}{KG} & -\frac{1}{18} \frac{3K-2G}{KG} & \frac{1}{9} \frac{3K+G}{KG} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\sigma_z \\ d\tau_{xy} \\ d\tau_{xz} \\ d\tau_{yz} \end{bmatrix} \quad [4.56]$$

Escribiendo cada componente de las deformaciones por separado:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x &= \left(\frac{1}{9} \frac{3K+G}{KG} \right) d\sigma_x + \left(-\frac{1}{18} \frac{3K-2G}{KG} \right) d\sigma_y + \left(-\frac{1}{18} \frac{3K-2G}{KG} \right) d\sigma_z - \frac{1}{3K^s} du_w \\ d\varepsilon_y &= \left(-\frac{1}{18} \frac{3K-2G}{KG} \right) d\sigma_x + \left(\frac{1}{9} \frac{3K+G}{KG} \right) d\sigma_y + \left(-\frac{1}{18} \frac{3K-2G}{KG} \right) d\sigma_z - \frac{1}{3K^s} du_w \\ d\varepsilon_z &= \left(-\frac{1}{18} \frac{3K-2G}{KG} \right) d\sigma_x + \left(-\frac{1}{18} \frac{3K-2G}{KG} \right) d\sigma_y + \left(\frac{1}{9} \frac{3K+G}{KG} \right) d\sigma_z - \frac{1}{3K^s} du_w \end{aligned} \quad [4.57]$$

Y teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{9} \frac{3K+G}{KG} \right) + \left(-\frac{1}{18} \frac{3K-2G}{KG} \right) + \left(-\frac{1}{18} \frac{3K-2G}{KG} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{9} \frac{3K+G}{KG} \right) - \left(\frac{1}{9} \frac{3K-2G}{KG} \right) = \frac{1}{9} \frac{3K}{KG} + \frac{1}{9} \frac{G}{KG} - \frac{1}{9} \frac{3K}{KG} + \frac{1}{9} \frac{2G}{KG} = \frac{1}{3K} \end{aligned} \quad [4.58]$$

Sumamos para obtener la deformación volumétrica:

$$d\varepsilon_v = d\varepsilon_x + d\varepsilon_y + d\varepsilon_z = \frac{1}{3K} d\sigma_x + \frac{1}{3K} d\sigma_y + \frac{1}{3K} d\sigma_z - \frac{1}{K^s} du_w \quad [4.59]$$

$$d\varepsilon_v = \frac{1}{3K} (d\sigma_x + d\sigma_y + d\sigma_z) - \frac{1}{K^s} du_w \quad [4.60]$$

$$d\varepsilon_v = \frac{1}{K} dp' - \frac{1}{K^s} du_w \quad [4.61]$$

Donde:

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial p'} = \frac{1}{K} \quad y \quad \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial u_w} = \frac{1}{K^s} \quad [4.62]$$

La ecuación de la superficie de estado relaciona el valor de un incremento de la relación de vacíos con los incrementos de tensiones netas y de succión.

$$\Delta e = a_1 \Delta \ln(p' + a_4) + a_2 \Delta \ln \left(\frac{s + p_{ref}}{p_{ref}} \right) + a_3 \Delta \left[\ln(p' + a_4) \ln \left(\frac{s + p_{ref}}{p_{ref}} \right) \right] \quad [4.62]$$

El incremento de la relación de vacíos es:

$$\Delta e = e - e_0 \quad [4.63]$$

Y los incrementos de tensión neta y succión son:

$$\Delta \ln(p' + a_4) = \ln(p'_f + a_4) - \ln(p'_0 + a_4) = \ln \left[\frac{(p'_f + a_4)}{(p'_0 + a_4)} \right] \quad [4.64]$$

$$\Delta \ln \left(\frac{s + p_{ref}}{p_{ref}} \right) = \ln \left(\frac{s_f + p_{ref}}{p_{ref}} \right) - \ln \left(\frac{s_0 + p_{ref}}{p_{ref}} \right) = \ln \frac{\frac{s_f + p_{ref}}{p_{ref}}}{\frac{s_0 + p_{ref}}{p_{ref}}} = \ln \frac{s_f + p_{ref}}{s_0 + p_{ref}} \quad [4.65]$$

$$\Delta \left[\ln(p' + a_4) \ln \left(\frac{s + p_{ref}}{p_{ref}} \right) \right] = \ln(p'_f + a_4) \ln \left(\frac{s_f + p_{ref}}{p_{ref}} \right) - \ln(p'_0 + a_4) \ln \left(\frac{s_0 + p_{ref}}{p_{ref}} \right) \quad [4.66]$$

Reemplazando y despejando e:

$$\begin{aligned}
 e = e_0 - a_1 \ln(p'_0 + a_4) - a_2 \ln \left(\frac{s_0 + p_{ref}}{p_{ref}} \right) - a_3 \ln(p'_0 + a_4) \ln \left(\frac{s_0 + p_{ref}}{p_{ref}} \right) + \\
 + a_1 \ln(p'_f + a_4) + a_2 \ln \left(\frac{s_f + p_{ref}}{p_{ref}} \right) + a_3 \ln(p'_f + a_4) \ln \left(\frac{s_f + p_{ref}}{p_{ref}} \right)
 \end{aligned} \quad [4.67]$$

4.2.3 Convención de signos

Usualmente en Geotecnia se establece que las Compresiones (+) son positivas y que estas reducen el volumen, por ello:

$$\varepsilon_v = - \frac{\Delta e}{1 + e_0} = - \frac{e_{final} - e_{inicial}}{1 + e_{inicial}} = - \frac{e_f - e_0}{1 + e_0} \quad [4.67]$$

Ejemplo:

$$e_0 = 1.75; \quad e_f = 1.55 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_v = -\frac{1.55 - 1.75}{1 + 1.75} = 0.0727$$

Con lo cual un valor positivo de la deformación volumétrica indica una disminución del volumen de la porción de suelo estudiada.

4.3 Modelo Constitutivo Hidráulico

4.3.1 Ley de Darcy²

Esta es la ley constitutiva para los problemas hidráulicos y relaciona el flujo con la presión y el peso del agua, a través del tensor de permeabilidad.

$$q_i = -K_{ij}(S_r)(p_{,j} - \rho^w g_j) \quad \text{ó} \quad \mathbf{q} = -\mathbf{K}(S_r) \cdot (\nabla p - \rho^w \mathbf{g}) \quad [4.68]$$

∇p es el gradiente de la presión de agua en los poros, el punto indica producto escalar o contraído. $\mathbf{K}(S_r)$ es el tensor de permeabilidades y es función del grado de saturación. \mathbf{g} es el vector aceleración de la gravedad y ρ^w es la densidad del agua.

4.3.2 Curva de retención³

La relación que existe entre el grado de saturación y la succión, es un hecho que puede medirse experimentalmente y para el cual existen varias expresiones. Nosotros adoptamos la expresión de curva de retención de (Van Genuchten, 1980):

$$S_r = \left[1 + \left(\frac{s}{P_0 f_n} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right]^{-\lambda} \quad [4.69]$$

$$f_n = \exp[-\eta(n - n_0)] \quad [4.70]$$

Donde λ , es un parámetro material y P_0 es el valor de entrada de aire a la porosidad n_0 , adoptado como un valor de referencia. f_n , es una función propuesta que tiene en cuenta la influencia de la porosidad en la curva de retención mediante el parámetro η .

² La ley de Henry Darcy describe, con base a experimentos de laboratorio, las características del movimiento de agua a través de medios porosos. Para su época su trabajo y aporte han sido monumentales. En esta tesina se utiliza esta ley, como relación constitutiva en el problema de flujo.

³ Aquí usamos una expresión de Van Genuchten más sofisticada que la original, pero que no cambia el concepto fundamental, es decir, la relación existente entre el grado de saturación y la succión matricial.

Para el nuestro caso particular de medio indeformable la función f_n tendrá un valor uno, puesto que será constante la porosidad. Por último la succión s , es en nuestro caso particular la presión de agua en los poros $s = -p$, con lo cual:

$$f_n = \exp[-\eta(n_0 - n_0)] = 1 \quad \Rightarrow \quad S_r = \left[1 + \left(\frac{-p}{P_0} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right]^{-\lambda} \quad [4.71]$$

Esta última expresión relaciona dos campos escalares, el grado de saturación y la presión de agua en los poros. El parámetro λ , es adimensional y adoptaremos un valor de 0.39. La presión de referencia será de $P_0 = 1.05$ [MPa].

4.3.3 Tensor de permeabilidad

El tensor permeabilidad puede expresarse como:

$$K_{ij}(S_r) = k_{ij}(n) \frac{k^{rl}(S_r)}{\mu^l} \quad \text{ó} \quad \mathbf{K}(S_r) = \mathbf{k}(n) \frac{k^{rl}(S_r)}{\mu^l} \quad [4.72]$$

Donde: k^{rl} [adimensional], es la permeabilidad relativa del líquido (rl indica relativa) es adimensional y varía de 0 a 1, además es función del grado de saturación (adoptamos: $k^{rl} = (S_r)^r$, r es una constante); μ^l [$P_a \cdot s$], es la viscosidad dinámica de la fase líquida, es función de la temperatura y \mathbf{k} [m^2], es el tensor de permeabilidad intrínseca, función de la porosidad, es decir, cambia con las deformaciones del suelo. Con la hipótesis de suelo indeformable este tensor se hace constante.

Si la permeabilidad es la misma en todas las direcciones del medio (isotropía), se puede trabajar con una permeabilidad escalar. Si se da el caso de que la permeabilidad tiene direcciones preferentes (ortotropía, axisimetría, etc.) el tensor de permeabilidad puede ser diagonal.

En nuestro caso supondremos isotropía adoptaremos $r = 3$, conductividad hidráulica

$$\text{inicial } k_0 = 2.5 \cdot 10^{-9} \text{ [m/s]} \text{ y } \mu^l = 10^{-3} \left[\frac{N \cdot seg}{m^2} \right] \text{ ó } [P_a \cdot s]$$

Capítulo 5

Aproximación Numérica

5.1 Aproximación por el Método de los Elementos Finitos

En este capítulo se desarrolla la solución del modelo matemático planteado en el capítulo anterior. Se hace referencia aquí a toda la bibliografía listada en el apartado Bibliografía de esta Tesina.

5.1.1 El Problema Mecánico

La forma integral de la componente mecánica de nuestro problema, obtenida mediante el método de los residuos ponderados, es:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}^T (\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}) d\Omega + \int_{\Gamma} \overline{\mathbf{w}}^T (\mathbf{I}^T \boldsymbol{\sigma} - \bar{\mathbf{t}}) d\Gamma = 0 \quad [5.1]$$

Aplicamos integración por partes y el teorema de la divergencia de Green al primer término de la primera integral, es decir:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}^T (\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma}) d\Omega = - \int_{\Omega} (\mathbf{L} \mathbf{w})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{w}^T \mathbf{I}^T \boldsymbol{\sigma} d\Gamma \quad [5.2]$$

Y eligiendo las funciones de peso de modo que $\overline{\mathbf{w}} = -\mathbf{w}$, nos queda:

$$- \int_{\Omega} (\mathbf{L} \mathbf{w})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{w}^T \mathbf{I}^T \boldsymbol{\sigma} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{w}^T \rho \mathbf{g} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{w}^T \mathbf{I}^T \boldsymbol{\sigma} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \quad [5.3]$$

Simplificando el segundo término con el cuarto obtenemos:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\mathbf{w})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{w}^T \rho \mathbf{g} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad [5.4]$$

Si elegimos como funciones de peso ciertos incrementos de desplazamientos virtuales compatibles con las condiciones de contorno de nuestro problema, $\mathbf{w} = \delta \mathbf{u}$, la última expresión queda:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\delta \mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \rho \mathbf{g} d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad [5.5]$$

Y teniendo en cuenta que $\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\delta \mathbf{u}$, finalmente:

$$\int_{\Omega} (\delta \boldsymbol{\varepsilon})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \rho \mathbf{g} d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad [5.6]$$

Que no es más que la expresión del Principio de los Trabajos Virtuales.

5.1.1.1 Funciones de Forma para el problema mecánico

Las funciones de forma sirven para trasladar las incógnitas a los nodos del elemento, es decir, pasamos de tener como incógnita un campo, de por ejemplo, desplazamientos a tener como incógnita los desplazamientos en los nodos del elemento.

$$p \cong \mathbf{N}_p \bar{\mathbf{p}} \quad [5.7]$$

$$\mathbf{u} \cong \mathbf{N}_u \bar{\mathbf{u}} \quad [5.8]$$

Donde:

\mathbf{u} : es el campo de desplazamientos en alguna porción del dominio (elemento).

\mathbf{N}_u : es la función de forma elegida.

$\bar{\mathbf{u}}$: es el vector de desplazamientos en los nodos del elemento.

Además, teniendo en cuenta que:

$$\mathbf{w}^T = \mathbf{N}_u \quad [5.9]$$

$$\mathbf{B}^T = (\mathbf{L}\mathbf{w})^T = (\mathbf{L}\mathbf{N}_u)^T \quad [5.10]$$

Donde:

B: es la matriz de derivadas de las funciones de forma que será utilizada posteriormente.

L: es un operador definido en el apartado Apéndice 1 Notación.

Recordando lo visto en el capítulo anterior respecto de la relación tensión-deformación puede escribirse:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^s) = \mathbf{D}\left(d\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{m}\frac{dp}{3K_t^s}\right) \quad [5.11]$$

En esta expresión ya se ha tenido en cuenta que la tensión neta es igual a la tensión total y la expresión entre paréntesis representa la deformación neta. Teniendo en cuenta que:

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}d\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{N}_u d\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{B}d\bar{\mathbf{u}} \quad [5.12]$$

La relación [5.11] puede expresarse en forma incremental como:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} = \mathbf{D}\mathbf{B}\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \mathbf{D}\frac{1}{3K_t^s}\mathbf{m}\mathbf{N}_p\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} \quad [5.13]$$

La forma débil del problema de equilibrio habiendo reemplazado las funciones de forma queda:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}_u \rho \mathbf{g} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}_u \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad [5.14]$$

Y su forma incremental:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}_u \rho \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}_u \frac{\partial \bar{\mathbf{t}}}{\partial t} d\Gamma \quad [5.15]$$

Reemplazando la ecuación constitutiva incremental:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \frac{1}{3K_t^s} \mathbf{m} \mathbf{N}_p \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}_u \rho \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}_u \frac{\partial \bar{\mathbf{t}}}{\partial t} d\Gamma \quad [5.16]$$

Podemos resumir el problema escribiendo el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\mathbf{K}_T \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \mathbf{Q}_T \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} = \mathbf{f}^u \quad [5.17]$$

Ó expresado a partir de la discretización en elementos y su posterior ensamblado:

$$\mathbb{E}_e \mathbf{K}_T^{(e)} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \mathbb{E}_e \mathbf{Q}_T^{(e)} \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} = \mathbb{E}_e \mathbf{f}^{u(e)} \quad [5.18]$$

Donde:

Matriz de Rigidez: $\mathbf{K}_T^{(e)} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad [5.19]$

Matriz de acoplamiento : $\mathbf{Q}_T^{(e)} = \frac{1}{3} \int_{\Omega^e} \frac{1}{K_t^s} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{m} \mathbf{N}_p d\Omega \quad [5.20]$

Vector de fuerzas nodales : $\mathbf{f}^{u(e)} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_u \rho \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}_u \frac{\partial \bar{\mathbf{t}}}{\partial t} d\Gamma \quad [5.21]$

5.1.2 El Problema de Flujo no Saturado

La forma integral del problema de flujo no saturado obtenida a través del método de los residuos ponderados, puede escribirse:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}^T \left\{ \text{div}[-\mathbf{K}(S_r) \cdot \nabla p] + \text{div}[\rho^w \mathbf{K}(S_r) \cdot \mathbf{g}] + S_r \frac{\partial n}{\partial t} + n \frac{\partial S_r}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{n S_r}{K^w} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \right\} d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{w}}^T \left\{ [\mathbf{K}(S_r)(-\nabla p + \rho^w \mathbf{g})]^T \mathbf{n} - q^w \right\} d\Gamma = 0 \quad [5.22]$$

Aplicamos integración por partes y el teorema de la divergencia de Green a los siguientes términos de la primera integral, es decir:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}^T \text{div}[-\mathbf{K}(S_r) \nabla p] d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{w})^T \mathbf{K}(S_r) \nabla p d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{w}^T \mathbf{K}(S_r) \nabla p \mathbf{n} d\Gamma \quad [5.23]$$

$$[5.24]$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}^T \operatorname{div} [\mathbf{K}(S_r) \rho^w \mathbf{g}] d\Omega = - \int_{\Omega} \rho^w (\nabla \mathbf{w})^T \mathbf{K}(S_r) \mathbf{g} d\Omega + \int_{\Gamma} \rho^w \mathbf{w}^T \mathbf{K}(S_r) \mathbf{g} n d\Gamma$$

Reemplazando y eligiendo $\mathbf{w} = -\overline{\mathbf{w}}$, resulta:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{w})^T \mathbf{K}(S_r) \nabla p d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{w}^T \mathbf{K}(S_r) \nabla p \mathbf{n} d\Gamma - \\ & - \int_{\Omega} \rho^w (\nabla \mathbf{w})^T \mathbf{K}(S_r) \mathbf{g} d\Omega + \int_{\Gamma} \rho^w \mathbf{w}^T \mathbf{K}(S_r) \mathbf{g} n d\Gamma + \\ & + \int_{\Omega} \mathbf{w}^T S_r \frac{\partial n}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{w}^T n \frac{\partial S_r}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{w}^T \frac{n S_r}{K^w} \frac{\partial p}{\partial t} d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma} \mathbf{w}^T \mathbf{K}(S_r) \nabla p \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \rho^w \mathbf{w}^T \mathbf{K}(S_r) \mathbf{g} n d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathbf{w}^T q^w d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad [5.25]$$

Simplificando el segundo y cuarto términos con el octavo y noveno resulta:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{w})^T \mathbf{K}(S_r) \nabla p d\Omega - \int_{\Omega} \rho^w (\nabla \mathbf{w})^T \mathbf{K}(S_r) \mathbf{g} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \mathbf{w}^T S_r \frac{\partial n}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{w}^T n \frac{\partial S_r}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{w}^T \frac{n S_r}{K^w} \frac{\partial p}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{w}^T q^w d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad [5.26]$$

Colocando las incógnitas a la izquierda y los datos a la derecha obtenemos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{w})^T \mathbf{K}(S_r) \nabla p d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{w}^T S_r \frac{\partial n}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{w}^T n \frac{\partial S_r}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{w}^T \frac{n S_r}{K^w} \frac{\partial p}{\partial t} d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} \rho^w (\nabla \mathbf{w})^T \mathbf{K}(S_r) \mathbf{g} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{w}^T q^w d\Gamma \end{aligned} \quad [5.27]$$

5.1.2.1 Funciones de forma para el problema hidráulico

Como no podemos resolver nuestro problema de forma exacta, obteniendo la función de presión de poro de agua, discretizamos el medio continuo en estudio dividiéndolo en porciones llamadas elementos finitos. Así, a partir de ahora aproximamos las

presiones de poro, poniéndolas en función del valor de la presión en los nodos de los elementos finitos:

$$p \cong \mathbf{N}_p \bar{\mathbf{p}} \quad \Rightarrow \quad \nabla p \cong \nabla \mathbf{N}_p \bar{\mathbf{p}} \quad [5.28a]$$

$$\mathbf{u} \cong \mathbf{N}_u \bar{\mathbf{u}} \quad [5.28b]$$

Donde:

p : Es el campo de presiones de poro de agua.

$\bar{\mathbf{p}}$: Vector de valores de presiones de poro en los nodos de los elementos.

\mathbf{N}_p : Es la función de forma elegida para las presiones de poro.

\mathbf{u} : Es el campo de desplazamientos dentro del elemento.

$\bar{\mathbf{u}}$: Es el vector de desplazamientos nodales.

\mathbf{N}_u : Es la función de forma elegida para los desplazamientos.

En este caso:

$$\mathbf{w}^T = \mathbf{N}_p^T \quad (\text{Galerkin}) \quad [5.29]$$

Además:

$$n = \varepsilon_v = \mathbf{m}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{m}^T \mathbf{L} \mathbf{u} = \mathbf{m}^T \mathbf{L} \mathbf{N}_u \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{m}^T \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}} \quad [5.30]$$

Entonces:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \mathbf{m}^T \mathbf{B} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \quad [5.31]$$

La relación tensión deformación puede expresarse como:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^s) = \mathbf{D} \left(d\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{m} \frac{dp}{3K_t^s} \right) \quad [5.32]$$

En esta expresión ya se ha tenido en cuenta que la tensión neta es igual a la tensión total y la expresión entre paréntesis representa la deformación neta. Teniendo en cuenta que:

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}d\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{N}_u d\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{B}d\bar{\mathbf{u}} \quad [5.33]$$

Podemos expresarla en forma incremental como:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^*}{\partial t} = \mathbf{DB} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \mathbf{D} \frac{1}{3K_t^s} \mathbf{m}\mathbf{N}_p \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} \quad [5.34]$$

Reemplazando:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{K}(S_r) \nabla \mathbf{N}_p \bar{\mathbf{p}} d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{N}_p)^T S_r \mathbf{m}^T \mathbf{B} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} (\mathbf{N}_p)^T n \frac{\partial S_r}{\partial \boldsymbol{\sigma}^*} \left(\mathbf{DB} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \mathbf{D} \frac{1}{3K_t^s} \mathbf{m}\mathbf{N}_p \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} \right) d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} (\mathbf{N}_p)^T n \frac{\partial S_r}{\partial p} (\mathbf{N}_p) \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{N}_p)^T \frac{n S_r}{K^w} (\mathbf{N}_p) \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} \rho^w (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{K}(S_r) \mathbf{g} d\Omega - \int_{\Gamma} (\mathbf{N}_p)^T q^w d\Gamma \end{aligned} \quad [5.35]$$

Reordenamos un poco:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\mathbf{N}_p)^T S_r \mathbf{m}^T \mathbf{B} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{N}_p)^T n \frac{\partial S_r}{\partial \boldsymbol{\sigma}^*} \mathbf{DB} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} (\mathbf{N}_p)^T n \frac{\partial S_r}{\partial p} (\mathbf{N}_p) \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{N}_p)^T \frac{n S_r}{K^w} (\mathbf{N}_p) \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{K}(S_r) \nabla \mathbf{N}_p \bar{\mathbf{p}} d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} \rho^w (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{K}(S_r) \mathbf{g} d\Omega - \int_{\Gamma} (\mathbf{N}_p)^T q^w d\Gamma \end{aligned} \quad [5.36]$$

Podemos resumir el problema escribiendo el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\mathbf{P} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \mathbf{S} \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} + \mathbf{H} \bar{\mathbf{p}} - \mathbf{f}^p = \mathbf{0} \quad [5.37]$$

Donde :

Matriz de Acoplamiento $\mathbf{P} = \int_{\Omega} (\mathbf{N}_p)^T S_r \mathbf{m}^T \mathbf{B} d\Omega$ [5.38]

Matriz de Compresibilidad $\mathbf{S} = \int_{\Omega} (\mathbf{N}_p)^T n \frac{\partial S_r}{\partial p} (\mathbf{N}_p) d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{N}_p)^T \frac{n S_r}{K^w} (\mathbf{N}_p) d\Omega$ [5.39]

Matriz de Permeabilidad $\mathbf{H} = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{K}(S_r) \nabla \mathbf{N}_p d\Omega$ [5.40]

Vector de Caudales Nodales $\mathbf{f}^p = \int_{\Omega} \rho^w (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{K}(S_r) \mathbf{g} d\Omega - \int_{\Gamma} (\mathbf{N}_p)^T q^w d\Gamma$ [5.41]

Ahora bien considerando una discretización por elementos finitos:

$$\mathbb{E}_e \mathbf{P}^{(e)} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \mathbb{E}_e \mathbf{S}^{(e)} \frac{d \bar{\mathbf{p}}}{dt} + \mathbb{E}_e \mathbf{H}^{(e)} \bar{\mathbf{p}} = \mathbb{E}_e \mathbf{f}^{p(e)} \quad [5.42]$$

Donde: \mathbb{E}_e , es el operador de ensamblaje y simboliza la contribución de cada elemento al sistema de ecuaciones global del continuo.

Obviamente: $\mathbf{P} = \mathbb{E}_e \mathbf{P}^{(e)}$; $\mathbf{H} = \mathbb{E}_e \mathbf{H}^{(e)}$; $\mathbf{S} = \mathbb{E}_e \mathbf{S}^{(e)}$ y $\mathbf{f}^p = \mathbb{E}_e \mathbf{f}^{p(e)}$, entonces:

Para resaltar la no linealidad podemos escribir:

$$\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}) \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \mathbf{S}(\bar{\mathbf{p}}) \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} + \mathbf{H}(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\mathbf{p}} - \mathbf{f}^p = \mathbf{0} \quad [5.43]$$

Vemos además que:

Matriz de Acoplamiento Elemental $\mathbf{P}^{(e)} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}_p)^T S_r \mathbf{m}^T \mathbf{B} d\Omega$ [5.44]

Matriz de Compresibilidad Elemental $\mathbf{S}^{(e)} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}_p)^T n \frac{\partial S_r}{\partial p} (\mathbf{N}_p) d\Omega + \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}_p)^T \frac{n S_r}{K^w} (\mathbf{N}_p) d\Omega$ [5.45]

Matriz de Permeabilidad Elemental $\mathbf{H}^{(e)} = \int_{\Omega^e} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{K}(S_r) \nabla \mathbf{N}_p d\Omega$ [5.46]

Vector de Caudales Nodales Elemental $\mathbf{f}^{p(e)} = \int_{\Omega^e} \rho^w (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{K}(S_r) \mathbf{g} d\Omega - \int_{\Gamma^e} (\mathbf{N}_p)^T q^w d\Gamma$ [5.47]

Así, habiendo aplicado el Método de los Elementos Finitos, obtenemos el siguiente sistema no lineal de ecuaciones diferenciales semi-discreto:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_T \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \mathbf{Q}_T \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} = \mathbf{f}^u \\ \mathbf{P} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \mathbf{S} \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} + \mathbf{H} \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{f}^p \end{cases} \quad [5.48]$$

Este sistema de ecuaciones lo podemos expresar en forma matricial como sigue:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & \mathbf{Q}_T \\ \mathbf{P} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\bar{\mathbf{u}}/dt \\ d\bar{\mathbf{p}}/dt \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^u \\ \mathbf{f}^p \end{Bmatrix} \quad [5.49]$$

Donde, llamando a cada matriz:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & \mathbf{Q}_T \\ \mathbf{P} & \mathbf{S} \end{bmatrix}, \quad [5.50]$$

Evidentemente estas matrices son no simétricas.

Llamando además:

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{Bmatrix} d\bar{\mathbf{u}}/dt \\ d\bar{\mathbf{p}}/dt \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^u \\ \mathbf{f}^p \end{Bmatrix} \quad [5.51]$$

Podemos escribir sencillamente:

$$\mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{D} \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F} \quad [5.52]$$

5.1.3 Discretización Temporal del Problema Acoplado

Como vimos, podemos escribir el sistema de ecuaciones de nuestro problema como en [5.52]. Donde la incógnita es el vector \mathbf{X} . Su derivada temporal puede expresarse mediante la regla del trapecio generalizada, llamada regla generalizada del punto medio como:

$$\left(\frac{d\mathbf{X}}{dt} \right)_{n+\theta} = \frac{\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n}{\Delta t} \quad [5.53]$$

Y el valor de la incógnita en el punto $n + \theta$, es:

$$\mathbf{X}_{n+\theta} = (1 - \theta)\mathbf{X}_n + \theta\mathbf{X}_{n+1} \quad [5.54]$$

Reemplazando en la ecuación y multiplicando ambos miembros por Δt , se obtiene:

$$\mathbf{C}[(1 - \theta)\mathbf{X}_n + \theta\mathbf{X}_{n+1}]_{n+\theta} \Delta t + \mathbf{D} \left[\frac{\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n}{\Delta t} \right]_{n+\theta} \Delta t = \mathbf{F}_{n+\theta} \Delta t \quad [5.55]$$

Reordenando podemos escribir:

$$[\mathbf{C}(1 - \theta)]_{n+\theta} \Delta t \mathbf{X}_n + [\mathbf{C}\theta]_{n+\theta} \Delta t \mathbf{X}_{n+1} + [\mathbf{D}]_{n+\theta} \mathbf{X}_{n+1} - [\mathbf{D}]_{n+\theta} \mathbf{X}_n = \mathbf{F}_{n+\theta} \Delta t \quad [5.56]$$

Colocando las incógnitas en el miembro izquierdo:

$$[\mathbf{C}\theta\Delta t + \mathbf{D}]_{n+\theta} \mathbf{X}_{n+1} = [\mathbf{D} - \mathbf{C}(1 - \theta)\Delta t]_{n+\theta} \mathbf{X}_n + \mathbf{F}_{n+\theta}\Delta t \quad [5.57]$$

Sistema de ecuaciones con el cual calculamos \mathbf{X}_{n+1} , a partir de los valores de \mathbf{X}_n y $\mathbf{F}_{n+\theta}$. Por este motivo, es decir, por tener que resolver este sistema de ecuaciones, a este método se lo dice implícito.

Δt es el intervalo de tiempo entre \mathbf{X}_n y \mathbf{X}_{n+1} , el parámetro θ varía entre 0 y 1.

Expandiendo la solución obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}\theta\Delta t & -\mathbf{Q}\theta\Delta t \\ \mathbf{Q}^T & \mathbf{H}\theta\Delta t + \mathbf{S} \end{bmatrix}_{n+\theta} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}(1-\theta)\Delta t & \mathbf{Q}(1-\theta)\Delta t \\ \mathbf{Q}^T & \mathbf{S} - \mathbf{H}(1-\theta)\Delta t \end{bmatrix}_{n+\theta} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix}_n + \Delta t \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^u \\ \mathbf{f}^p \end{Bmatrix}_{n+\theta} \quad [5.58]$$

O bien:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & \mathbf{Q}_T \\ \mathbf{P} & \mathbf{H}\theta\Delta t + \mathbf{S} \end{bmatrix}_{n+\theta} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & \mathbf{Q}_T \\ \mathbf{P} & \mathbf{S} - \mathbf{H}(1-\theta)\Delta t \end{bmatrix}_{n+\theta} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix}_n + \Delta t \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^u \\ \Delta \mathbf{f}^p \end{Bmatrix}_{n+\theta} \quad [5.59]$$

Queda un sistema de ecuaciones no simétrico.

5.1.3.1 Estrategia de Implementación

El sistema de ecuaciones obtenido hasta aquí puede manipularse un poco para favorecer la implementación de la siguiente manera:

Sea:

$$\mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{D}\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F} \quad [5.60]$$

La ecuación a discretizar en el tiempo, la podemos escribir:

$$\mathbf{C}[(1-\theta)\mathbf{X}_n + \theta\mathbf{X}_{n+1}]_{n+\theta} + \mathbf{D}\left[\frac{\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n}{\Delta t}\right]_{n+\theta} = \mathbf{F}_{n+\theta} \quad [5.61]$$

Adoptando el esquema de Crank-Nicholson: $\theta = \frac{1}{2}$

$$\mathbf{C}\left[\frac{1}{2}\mathbf{X}_n + \frac{1}{2}\mathbf{X}_{n+1}\right]_{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{D}\left[\frac{\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n}{\Delta t}\right]_{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{F}_{n+\frac{1}{2}} \quad [5.62]$$

O bien:

$$\frac{\mathbf{C}}{2}\mathbf{X}_n + \frac{\mathbf{C}}{2}\mathbf{X}_{n+1} + \frac{\mathbf{D}}{\Delta t}\mathbf{X}_{n+1} - \frac{\mathbf{D}}{\Delta t}\mathbf{X}_n = \mathbf{F}_{n+\frac{1}{2}} \quad [5.63]$$

Dejando las incógnitas en el miembro de la izquierda:

$$\left(\frac{\mathbf{D}}{\Delta t} + \frac{\mathbf{C}}{2}\right) \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+\frac{1}{2}} + \left(\frac{\mathbf{D}}{\Delta t} - \frac{\mathbf{C}}{2}\right) \mathbf{X}_n \quad [5.64]$$

Llamando:

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\mathbf{D}}{\Delta t} + \frac{\mathbf{C}}{2}\right) \quad y \quad \mathbf{B} = \left(\frac{\mathbf{D}}{\Delta t} - \frac{\mathbf{C}}{2}\right) \quad [5.65]$$

Finalmente:

$$\mathbf{A} \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{B} \mathbf{X}_n \quad [5.66]$$

Recordar que:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & \mathbf{Q}_T \\ \mathbf{P} & \mathbf{S} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^u \\ \mathbf{f}^p \end{Bmatrix} \quad [5.67]$$

5.1.4 Discretización Temporal del Problema Desacoplado

Como vimos, podemos describir el problema hidráulico como sigue:

$$\mathbf{P} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \mathbf{S} \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} + \mathbf{H} \bar{\mathbf{p}} - \mathbf{f}^p = \mathbf{0} \quad [5.68]$$

Suponiendo que el campo de desplazamientos es conocido, así:

$$\mathbf{H} \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{S} \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} = \mathbf{f}^p - \mathbf{P} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \quad [5.69]$$

Donde la incógnita es el vector $\bar{\mathbf{p}}$. Su derivada temporal puede expresarse mediante la regla del trapecio generalizada, llamada regla generalizada del punto medio como:

$$\left(\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt}\right)_{n+\theta} = \frac{\bar{\mathbf{p}}_{n+1} - \bar{\mathbf{p}}_n}{\Delta t} \quad [5.70]$$

Y el valor de la incógnita en el punto $n + \theta$, es:

$$\bar{\mathbf{p}}_{n+\theta} = (1-\theta)\bar{\mathbf{p}}_n + \theta\bar{\mathbf{p}}_{n+1} \quad [5.71]$$

Reemplazando en la ecuación y multiplicando ambos miembros por Δt , se obtiene:

$$\mathbf{H} \left[(1-\theta)\bar{\mathbf{p}}_n + \theta\bar{\mathbf{p}}_{n+1} \right]_{n+\theta} \Delta t + \mathbf{S} \left[\frac{\bar{\mathbf{p}}_{n+1} - \bar{\mathbf{p}}_n}{\Delta t} \right]_{n+\theta} \Delta t = \mathbf{f}^p_{n+\theta} \Delta t - \mathbf{P} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \Delta t \quad [5.72]$$

Reordenando podemos escribir:

$$\left[\mathbf{H}(1-\theta) \right]_{n+\theta} \Delta t \bar{\mathbf{p}}_n + \left[\mathbf{H}\theta \right]_{n+\theta} \Delta t \bar{\mathbf{p}}_{n+1} + \left[\mathbf{S} \right]_{n+\theta} \bar{\mathbf{p}}_{n+1} - \left[\mathbf{S} \right]_{n+\theta} \bar{\mathbf{p}}_n = \mathbf{f}^p_{n+\theta} \Delta t - \mathbf{P} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \Delta t \quad [5.73]$$

Colocando las incógnitas en el miembro izquierdo:

$$\left[\mathbf{H}\theta \Delta t + \mathbf{S} \right]_{n+\theta} \bar{\mathbf{p}}_{n+1} = \left[\mathbf{S} - \mathbf{H}(1-\theta) \Delta t \right]_{n+\theta} \bar{\mathbf{p}}_n + \mathbf{f}^p_{n+\theta} \Delta t - \mathbf{P} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \Delta t \quad [5.74]$$

Sistema de ecuaciones con el cual calculamos $\bar{\mathbf{p}}_{n+1}$, a partir de los valores de $\bar{\mathbf{p}}_n$ y

$$\mathbf{f}^p_{n+\theta} \Delta t - \mathbf{P} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \Delta t .$$

Δt es el intervalo de tiempo entre $\bar{\mathbf{p}}_n$ y $\bar{\mathbf{p}}_{n+1}$, el parámetro θ varía entre 0 y 1.

5.2 Formulación “u-p” de Elementos Finitos para Flujo en Medio Poroso Deformable

5.2.1 Espacio de 2 dimensiones. Elemento Lineal.

Por razones de simplicidad a la hora de la implementación, se ha optado por trabajar en el caso bidimensional, considerando que se trata de un problema de deformación plana de tensiones.

5.2.1.1 Campo de Presiones de Poro de Agua. Elemento lineal.

Se eligen elementos triangulares lineales para modelar tanto el campo de presiones de poro como el campo de desplazamientos.

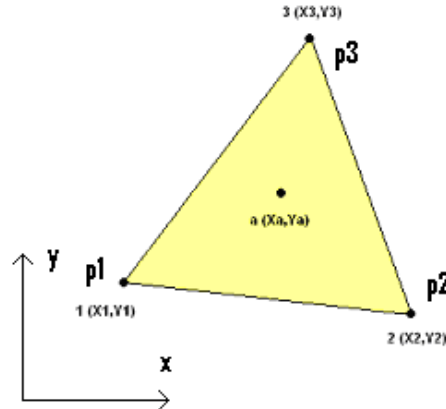


Figura 5.1.- Elemento triángulo lineal (3 nodos)

Presión de poros en los nodos del elemento:

$$\bar{\mathbf{p}} = [p_1 \quad p_2 \quad p_3]^T \quad [5.75]$$

Función de forma de la presión de poros:

$$\mathbf{N}_p = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \quad [5.76]$$

Aproximación del campo de presiones de poro mediante funciones de forma y valores nodales de presiones de poro:

$$p = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} \quad [5.77]$$

Dentro del elemento la presión de poros se aproxima mediante una función polinómica lineal, es decir:

$$p(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y \quad [5.78]$$

Para obtener las constantes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, reemplazamos los valores de las coordenadas de los nodos, obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} p_1(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 \\ p_2(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2 \\ p_3(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x_3 + \alpha_2 y_3 \end{cases} \quad [5.79]$$

Resolviéndolo se obtiene:

$$p(x, y) = \frac{1}{2A} [(a_1 + b_1 x + c_1 y)p_1 + (a_2 + b_2 x + c_2 y)p_2 + (a_3 + b_3 x + c_3 y)p_3] \quad [5.80]$$

Generalizando podemos escribir, las funciones de forma como:

$$N_i(x, y) = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \quad \text{con} \quad i = 1, 2, 3 \quad [5.81]$$

Donde A, es el área del elemento y se puede calcular como:

$$2A = \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \quad [5.82]$$

Las derivadas de las funciones de forma quedan:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{b_i}{2A} \quad [5.83]$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{c_i}{2A} \quad [5.84]$$

Matriz gradiente de las funciones de forma de presiones de poro:

$$\nabla \mathbf{N}_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{2A} & \frac{b_2}{2A} & \frac{b_3}{2A} \\ \frac{c_1}{2A} & \frac{c_2}{2A} & \frac{c_3}{2A} \end{bmatrix} \quad [5.85]$$

Operadores matriciales divergencia y gradiente, en 2D:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad [5.86a]$$

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad [5.86b]$$

5.2.1.2 Campo de Desplazamientos. Elemento lineal.

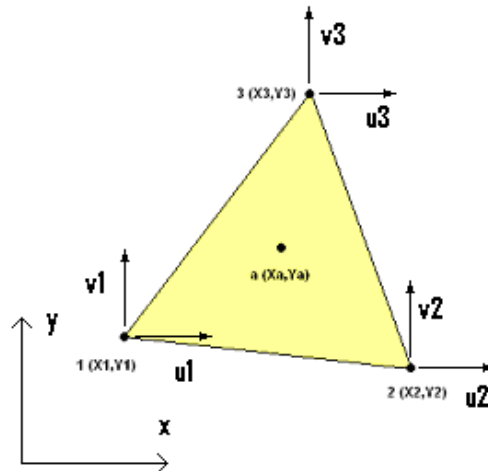


Figura 5.2.- Elemento triángulo lineal (3 nodos, 2 grados de libertad por nodo)

En este caso hay dos grados de libertad por nodo, desplazamientos según x e y.

Desplazamientos en los nodos del elemento:

$$\bar{\mathbf{u}} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3]^T \quad [5.87]$$

Función de forma de los desplazamientos:

$$\mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad [5.88]$$

Aproximación del campo de desplazamientos mediante las funciones de forma y los valores nodales de desplazamientos:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad [5.89]$$

Matriz de derivadas de las funciones de forma de desplazamientos:

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \quad [5.90]$$

Matriz de permeabilidad en función del grado de saturación:

$$\mathbf{K}(S_r) = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad [5.91]$$

Delta de Kronecker en notación matricial y 2D:

$$\mathbf{m} = [1 \quad 1 \quad 0]^T \quad [5.92]$$

5.2.2 Expresiones Matriciales para Elementos Lineales

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}_T \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \mathbf{Q}_T \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} = \mathbf{f}^u \\ \mathbf{P} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \mathbf{S} \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} + \mathbf{H} \bar{\mathbf{p}} - \mathbf{f}^p = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad [5.93]$$

$$\mathbf{K}_T^{(e)} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad [5.94]$$

$$\mathbf{K}_T^{(e)} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E(1-\nu)}{2(1-\nu^2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} d\Omega \quad [5.95]$$

$$\mathbf{Q}_T^{(e)} = \frac{1}{3} \int_{\Omega^e} \frac{1}{K_t^s} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{m} \mathbf{N}_p d\Omega \quad [5.97]$$

$$\mathbf{Q}^{(e)} = \int_{\Omega} \frac{(d_1 + d_2)}{3K^s} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} N_1 & \frac{\partial N_1}{\partial x} N_2 & \frac{\partial N_1}{\partial x} N_3 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} N_1 & \frac{\partial N_1}{\partial y} N_2 & \frac{\partial N_1}{\partial y} N_3 \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} N_1 & \frac{\partial N_2}{\partial x} N_2 & \frac{\partial N_2}{\partial x} N_3 \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} N_1 & \frac{\partial N_2}{\partial y} N_2 & \frac{\partial N_2}{\partial y} N_3 \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} N_1 & \frac{\partial N_3}{\partial x} N_2 & \frac{\partial N_3}{\partial x} N_3 \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} N_1 & \frac{\partial N_3}{\partial y} N_2 & \frac{\partial N_3}{\partial y} N_3 \end{bmatrix} d\Omega \quad [5.99]$$

$$\mathbf{f}^{u(e)} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \rho \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}_u^T \frac{\partial \bar{\mathbf{t}}}{\partial t} d\Gamma \quad [5.100]$$

$$\mathbf{f}^{u(e)} = \int_{\Omega} \rho \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} d\Omega + \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} d\Gamma \quad [5.101]$$

$$\mathbf{f}^{u(e)} = -\rho g \int_{\Omega} \begin{bmatrix} 0 \\ N_1 \\ 0 \\ N_2 \\ 0 \\ N_3 \end{bmatrix} d\Omega + \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} t_1 N_1 \\ t_2 N_1 \\ t_1 N_2 \\ t_2 N_2 \\ t_1 N_3 \\ t_2 N_3 \end{bmatrix} d\Gamma \quad [5.102]$$

$$\mathbf{P}^{(e)} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}_p)^T S_r \mathbf{m}^T \mathbf{B} d\Omega \quad [5.103]$$

$$\mathbf{P}^{(e)} = \int_{\Omega^e} S_r \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} d\Omega \quad [5.104]$$

$$\mathbf{P}^{(e)} = \int_{\Omega^e} S_r \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} N_1 & \frac{\partial N_1}{\partial y} N_1 & \frac{\partial N_2}{\partial x} N_1 & \frac{\partial N_2}{\partial y} N_1 & \frac{\partial N_3}{\partial x} N_1 & \frac{\partial N_3}{\partial y} N_1 \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} N_2 & \frac{\partial N_1}{\partial y} N_2 & \frac{\partial N_2}{\partial x} N_2 & \frac{\partial N_2}{\partial y} N_2 & \frac{\partial N_3}{\partial x} N_2 & \frac{\partial N_3}{\partial y} N_2 \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} N_3 & \frac{\partial N_1}{\partial y} N_3 & \frac{\partial N_2}{\partial x} N_3 & \frac{\partial N_2}{\partial y} N_3 & \frac{\partial N_3}{\partial x} N_3 & \frac{\partial N_3}{\partial y} N_3 \end{bmatrix} d\Omega \quad [5.105]$$

$$\mathbf{S}^{(e)} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}_p)^T n \frac{\partial S_r}{\partial p} (\mathbf{N}_p) d\Omega + \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}_p)^T \frac{n S_r}{K^w} (\mathbf{N}_p) d\Omega \quad [5.106]$$

$$\mathbf{S} = \int_{\Omega} n C_s \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{n S_r}{K^w} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} d\Omega \quad [5.107]$$

$$\mathbf{S} = \int_{\Omega} n C_s \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 & N_1 N_3 \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 & N_2 N_3 \\ N_3 N_1 & N_3 N_2 & N_3 N_3 \end{bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{n S_r}{K^w} \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 & N_1 N_3 \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 & N_2 N_3 \\ N_3 N_1 & N_3 N_2 & N_3 N_3 \end{bmatrix} d\Omega \quad [5.108]$$

$$\mathbf{H}^{(e)} = \int_{\Omega^e} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{K}(S_r) \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \quad [5.109]$$

$$\mathbf{H}^{(e)} = \int_{\Omega^e} \frac{k_0}{\mu^I} (S_r)^3 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} d\Omega \quad [5.110]$$

$$\mathbf{H}^{(e)} = \int_{\Omega^e} \frac{k_0}{\mu^I} (S_r)^3 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} + \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial x} + \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} d\Omega \quad [5.111]$$

$$\mathbf{f}^{p(e)} = \int_{\Omega^e} \rho^w (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{K}(S_r) \mathbf{g} d\Omega - \int_{\Gamma^e} (\mathbf{N}_p)^T q^w d\Gamma \quad [5.112]$$

$$\mathbf{f}^{p(e)} = \int_{\Omega^e} \rho^w \frac{k_0}{\mu^l} (S_r)^3 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} d\Omega - \int_{\Gamma^e} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} q^w d\Gamma \quad [5.113]$$

$$\mathbf{f}^{p(e)} = \int_{\Omega^e} \rho^w g \frac{k_0}{\mu^l} (S_r)^3 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} d\Omega - \int_{\Gamma^e} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} q^w d\Gamma \quad [5.114]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{K}_T^{(e)}]_{6 \times 6} [\bar{\mathbf{u}}^{(e)}]_{6 \times 1} + [\mathbf{Q}_T^{(e)}]_{6 \times 3} [\bar{\mathbf{p}}^{(e)}]_{3 \times 1} = [\mathbf{f}^{u(e)}]_{6 \times 1} \\ [\mathbf{P}^{(e)}]_{3 \times 6} [d\bar{\mathbf{u}}/dt^{(e)}]_{6 \times 1} + [\mathbf{S}]_{3 \times 3} [d\bar{\mathbf{p}}/dt]_{3 \times 1} + [\mathbf{H}]_{3 \times 3} [\bar{\mathbf{p}}^{(e)}]_{3 \times 1} = [\mathbf{f}^{p(e)}]_{3 \times 1} \end{array} \right. \quad [5.115]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{K}_T]_{(2n) \times (2n)} [\bar{\mathbf{u}}]_{(2n) \times 1} + [\mathbf{Q}_T]_{(2n) \times (n)} [\bar{\mathbf{p}}]_{(n) \times 1} = [\mathbf{f}^u]_{(2n) \times 1} \\ [\mathbf{P}]_{(n) \times (2n)} [d\bar{\mathbf{u}}/dt]_{(2n) \times 1} + [\mathbf{S}]_{(n) \times (n)} [d\bar{\mathbf{p}}/dt]_{(n) \times 1} + [\mathbf{H}]_{(n) \times (n)} [\bar{\mathbf{p}}]_{(n) \times 1} = [\mathbf{f}^p]_{(n) \times 1} \end{array} \right. \quad [5.116]$$

5.2.3 Espacio de 2 dimensiones. Elemento Cuadrático.

5.2.3.1 Campo de Presiones de Poro. Triángulos de 6 nodos (cuadráticos).

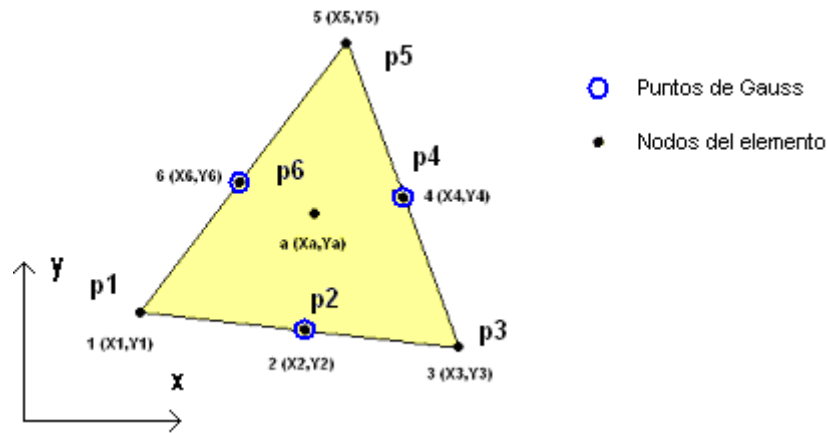


Figura 5.3.- Elemento triángulo cuadrático (6 nodos, 3 puntos de Gauss)

Presión de poros en los nodos del elemento:

$$\bar{\mathbf{p}} = [p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 \quad p_5 \quad p_6]^T \quad [5.117]$$

Función de forma de la presión de poros:

$$\mathbf{N}_p = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6] \quad [5.118]$$

Aproximación del campo de presiones de poro mediante funciones de forma y valores nodales de presiones de poro:

$$p = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6] \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix} \quad [5.119]$$

Matriz gradiente de las funciones de forma de presiones de poro:

$$\nabla \mathbf{N}_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial x} & \frac{\partial N_6}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_6}{\partial y} \end{bmatrix} \quad [5.120]$$

Operadores matriciales gradiente y divergencia, en 2D: ver [5.86a] y [5.86b]

5.2.3.2 Campo de Desplazamientos. Triángulos de 6 nodos (cuadráticos).

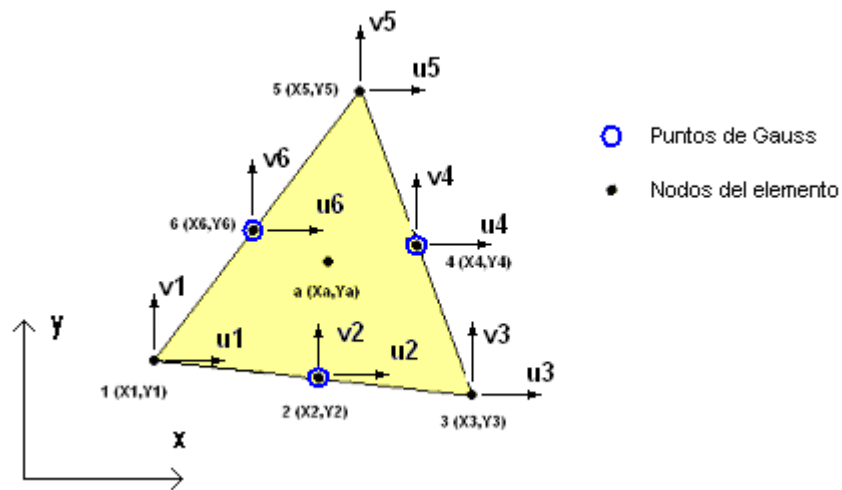


Figura 5.4.- Elemento triángulo cuadrático (6 nodos, 3 puntos de Gauss, 2 grados de libertad por nodo)

En este caso hay dos grados de libertad por nodo, desplazamientos según x e y.

Desplazamientos en los nodos del elemento:

$$\bar{\mathbf{u}} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4 \quad u_5 \quad v_5 \quad u_6 \quad v_6]^T \quad [5.121]$$

Función de forma de los desplazamientos:

$$\mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \quad [5.122]$$

Aproximación del campo de desplazamientos mediante las funciones de forma y los valores nodales de desplazamientos:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \end{Bmatrix} \quad [5.123]$$

Matriz de derivadas de las funciones deforma de desplazamientos:

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial x} & \frac{\partial N_6}{\partial y} & \frac{\partial N_6}{\partial x} \end{bmatrix} \quad [5.124]$$

Matriz de permeabilidad en función del grado de saturación: ver [5.91]

Delta de Kronecker en notación matricial y 2D: ver [5.92]

5.2.4 Expresiones Matriciales para Elementos Cuadráticos

$$\begin{cases} \mathbf{K}_T \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \mathbf{Q}_T \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} = \mathbf{f}^u \\ \mathbf{P} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \mathbf{S} \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} + \mathbf{H} \bar{\mathbf{p}} - \mathbf{f}^p = \mathbf{0} \end{cases} \quad [5.125]$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad [5.126]$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_5}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial x} \\ \frac{\partial N_6}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_6}{\partial y} & \frac{\partial N_6}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_i + \frac{4}{3}G_i & K_i - \frac{2}{3}G_i & 0 \\ K_i - \frac{2}{3}G_i & K_i + \frac{4}{3}G_i & 0 \\ 0 & 0 & G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial x} & \frac{\partial N_6}{\partial y} & \frac{\partial N_6}{\partial x} \end{bmatrix} d\Omega \quad [5.127]$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} d_1 + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} d_3 \right) & \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial y} d_2 + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial x} d_3 \right) & \dots & \dots & \dots & \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_6}{\partial x} d_1 + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_6}{\partial y} d_3 \right) & \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_6}{\partial y} d_2 + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_6}{\partial x} d_3 \right) \\ \left(\frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial x} d_2 + \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial y} d_3 \right) & \left(\frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} d_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} d_3 \right) & & & & \left(\frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_6}{\partial y} d_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_6}{\partial x} d_3 \right) & \left(\frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_6}{\partial x} d_2 + \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_6}{\partial y} d_3 \right) \\ \left(\frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} d_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} d_3 \right) & & & & & & \\ \left(\frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial x} d_2 + \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial y} d_3 \right) & & & & & & \\ \left(\frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} d_1 + \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} d_3 \right) & & & & & & \\ \left(\frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial x} d_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial y} d_3 \right) & & & & & & \\ \left(\frac{\partial N_4}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} d_1 + \frac{\partial N_4}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} d_3 \right) & & & & & & \\ \left(\frac{\partial N_4}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial x} d_2 + \frac{\partial N_4}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial y} d_3 \right) & & & & & & \\ \left(\frac{\partial N_5}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} d_1 + \frac{\partial N_5}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} d_3 \right) & & & & & & \\ \left(\frac{\partial N_5}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial x} d_2 + \frac{\partial N_5}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial y} d_3 \right) & & & & & & \\ \left(\frac{\partial N_6}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} d_1 + \frac{\partial N_6}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} d_3 \right) & & & & & \left(\frac{\partial N_6}{\partial x} \frac{\partial N_6}{\partial x} d_2 + \frac{\partial N_6}{\partial y} \frac{\partial N_6}{\partial y} d_3 \right) & \\ \left(\frac{\partial N_6}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial x} d_2 + \frac{\partial N_6}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial y} d_3 \right) & & & & & \left(\frac{\partial N_6}{\partial y} \frac{\partial N_6}{\partial y} d_1 + \frac{\partial N_6}{\partial x} \frac{\partial N_6}{\partial x} d_3 \right) & \end{bmatrix} d\Omega \quad [5.128]$$

$$\mathbf{Q} = \int_{\Omega} S_r \mathbf{B}^T \mathbf{m} \mathbf{N}_p d\Omega \quad [5.129]$$

$$\mathbf{Q} = \int_{\Omega} S_r \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_5}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial x} \\ \frac{\partial N_6}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_6}{\partial y} & \frac{\partial N_6}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6] d\Omega \quad [5.130]$$

$$\mathbf{Q}^{(e)} = \int_{\Omega} \frac{(d_1 + d_2)}{3K^s} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} N_1 & \frac{\partial N_1}{\partial x} N_2 & \frac{\partial N_1}{\partial x} N_3 & \frac{\partial N_1}{\partial x} N_4 & \frac{\partial N_1}{\partial x} N_5 & \frac{\partial N_1}{\partial x} N_6 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} N_1 & \frac{\partial N_1}{\partial y} N_2 & \frac{\partial N_1}{\partial y} N_3 & \frac{\partial N_1}{\partial y} N_4 & \frac{\partial N_1}{\partial y} N_5 & \frac{\partial N_1}{\partial y} N_6 \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} N_1 & \frac{\partial N_2}{\partial x} N_2 & \frac{\partial N_2}{\partial x} N_3 & \frac{\partial N_2}{\partial x} N_4 & \frac{\partial N_2}{\partial x} N_5 & \frac{\partial N_2}{\partial x} N_6 \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} N_1 & \frac{\partial N_2}{\partial y} N_2 & \frac{\partial N_2}{\partial y} N_3 & \frac{\partial N_2}{\partial y} N_4 & \frac{\partial N_2}{\partial y} N_5 & \frac{\partial N_2}{\partial y} N_6 \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} N_1 & \frac{\partial N_3}{\partial x} N_2 & \frac{\partial N_3}{\partial x} N_3 & \frac{\partial N_3}{\partial x} N_4 & \frac{\partial N_3}{\partial x} N_5 & \frac{\partial N_3}{\partial x} N_6 \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} N_1 & \frac{\partial N_3}{\partial y} N_2 & \frac{\partial N_3}{\partial y} N_3 & \frac{\partial N_3}{\partial y} N_4 & \frac{\partial N_3}{\partial y} N_5 & \frac{\partial N_3}{\partial y} N_6 \\ \frac{\partial N_4}{\partial x} N_1 & \frac{\partial N_4}{\partial x} N_2 & \frac{\partial N_4}{\partial x} N_3 & \frac{\partial N_4}{\partial x} N_4 & \frac{\partial N_4}{\partial x} N_5 & \frac{\partial N_4}{\partial x} N_6 \\ \frac{\partial N_4}{\partial y} N_1 & \frac{\partial N_4}{\partial y} N_2 & \frac{\partial N_4}{\partial y} N_3 & \frac{\partial N_4}{\partial y} N_4 & \frac{\partial N_4}{\partial y} N_5 & \frac{\partial N_4}{\partial y} N_6 \\ \frac{\partial N_5}{\partial x} N_1 & \frac{\partial N_5}{\partial x} N_2 & \frac{\partial N_5}{\partial x} N_3 & \frac{\partial N_5}{\partial x} N_4 & \frac{\partial N_5}{\partial x} N_5 & \frac{\partial N_5}{\partial x} N_6 \\ \frac{\partial N_5}{\partial y} N_1 & \frac{\partial N_5}{\partial y} N_2 & \frac{\partial N_5}{\partial y} N_3 & \frac{\partial N_5}{\partial y} N_4 & \frac{\partial N_5}{\partial y} N_5 & \frac{\partial N_5}{\partial y} N_6 \\ \frac{\partial N_6}{\partial x} N_1 & \frac{\partial N_6}{\partial x} N_2 & \frac{\partial N_6}{\partial x} N_3 & \frac{\partial N_6}{\partial x} N_4 & \frac{\partial N_6}{\partial x} N_5 & \frac{\partial N_6}{\partial x} N_6 \\ \frac{\partial N_6}{\partial y} N_1 & \frac{\partial N_6}{\partial y} N_2 & \frac{\partial N_6}{\partial y} N_3 & \frac{\partial N_6}{\partial y} N_4 & \frac{\partial N_6}{\partial y} N_5 & \frac{\partial N_6}{\partial y} N_6 \end{bmatrix} d\Omega \quad [5.131]$$

$$\mathbf{f}^u = \int_{\Omega} (\rho_s (1 - n) + S_r n \rho_w) \mathbf{N}_u^T \mathbf{g} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}_u^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad [5.132]$$

$$\mathbf{f}^u = \int_{\Omega} \rho \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_4 \\ N_5 & 0 \\ 0 & N_5 \\ N_6 & 0 \\ 0 & N_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} d\Omega + \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_4 \\ N_5 & 0 \\ 0 & N_5 \\ N_6 & 0 \\ 0 & N_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} d\Gamma \quad [5.133]$$

$$\mathbf{f}^{u(e)} = -\rho g \int_{\Omega} \begin{bmatrix} 0 \\ N_1 \\ 0 \\ N_2 \\ 0 \\ N_3 \\ 0 \\ N_4 \\ 0 \\ N_5 \\ 0 \\ N_6 \end{bmatrix} d\Omega + \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} t_1 N_1 \\ t_2 N_1 \\ t_1 N_2 \\ t_2 N_2 \\ t_1 N_3 \\ t_2 N_3 \\ t_1 N_4 \\ t_2 N_4 \\ t_1 N_5 \\ t_2 N_5 \\ t_1 N_6 \\ t_2 N_6 \end{bmatrix} d\Gamma \quad [5.134]$$

$$\mathbf{P}^{(e)} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}_p)^T S_r \mathbf{m}^T \mathbf{B} d\Omega \quad [5.135]$$

$$\mathbf{P}^{(e)} = \int_{\Omega^e} S_r \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial x} & \frac{\partial N_6}{\partial y} & \frac{\partial N_6}{\partial x} \end{bmatrix} d\Omega \quad [5.136]$$

$$\mathbf{P}^{(e)} = \int_{\Omega} S_r \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} N_1 & \frac{\partial N_1}{\partial y} N_1 & \frac{\partial N_2}{\partial x} N_1 & \frac{\partial N_2}{\partial y} N_1 & \frac{\partial N_3}{\partial x} N_1 & \frac{\partial N_3}{\partial y} N_1 & \frac{\partial N_4}{\partial x} N_1 & \frac{\partial N_4}{\partial y} N_1 & \frac{\partial N_5}{\partial x} N_1 & \frac{\partial N_5}{\partial y} N_1 & \frac{\partial N_6}{\partial x} N_1 & \frac{\partial N_6}{\partial y} N_1 \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} N_2 & \frac{\partial N_1}{\partial y} N_2 & \frac{\partial N_2}{\partial x} N_2 & \frac{\partial N_2}{\partial y} N_2 & \frac{\partial N_3}{\partial x} N_2 & \frac{\partial N_3}{\partial y} N_2 & \frac{\partial N_4}{\partial x} N_2 & \frac{\partial N_4}{\partial y} N_2 & \frac{\partial N_5}{\partial x} N_2 & \frac{\partial N_5}{\partial y} N_2 & \frac{\partial N_6}{\partial x} N_2 & \frac{\partial N_6}{\partial y} N_2 \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} N_3 & \frac{\partial N_1}{\partial y} N_3 & \frac{\partial N_2}{\partial x} N_3 & \frac{\partial N_2}{\partial y} N_3 & \frac{\partial N_3}{\partial x} N_3 & \frac{\partial N_3}{\partial y} N_3 & \frac{\partial N_4}{\partial x} N_3 & \frac{\partial N_4}{\partial y} N_3 & \frac{\partial N_5}{\partial x} N_3 & \frac{\partial N_5}{\partial y} N_3 & \frac{\partial N_6}{\partial x} N_3 & \frac{\partial N_6}{\partial y} N_3 \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} N_4 & \frac{\partial N_1}{\partial y} N_4 & \frac{\partial N_2}{\partial x} N_4 & \frac{\partial N_2}{\partial y} N_4 & \frac{\partial N_3}{\partial x} N_4 & \frac{\partial N_3}{\partial y} N_4 & \frac{\partial N_4}{\partial x} N_4 & \frac{\partial N_4}{\partial y} N_4 & \frac{\partial N_5}{\partial x} N_4 & \frac{\partial N_5}{\partial y} N_4 & \frac{\partial N_6}{\partial x} N_4 & \frac{\partial N_6}{\partial y} N_4 \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} N_5 & \frac{\partial N_1}{\partial y} N_5 & \frac{\partial N_2}{\partial x} N_5 & \frac{\partial N_2}{\partial y} N_5 & \frac{\partial N_3}{\partial x} N_5 & \frac{\partial N_3}{\partial y} N_5 & \frac{\partial N_4}{\partial x} N_5 & \frac{\partial N_4}{\partial y} N_5 & \frac{\partial N_5}{\partial x} N_5 & \frac{\partial N_5}{\partial y} N_5 & \frac{\partial N_6}{\partial x} N_5 & \frac{\partial N_6}{\partial y} N_5 \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} N_6 & \frac{\partial N_1}{\partial y} N_6 & \frac{\partial N_2}{\partial x} N_6 & \frac{\partial N_2}{\partial y} N_6 & \frac{\partial N_3}{\partial x} N_6 & \frac{\partial N_3}{\partial y} N_6 & \frac{\partial N_4}{\partial x} N_6 & \frac{\partial N_4}{\partial y} N_6 & \frac{\partial N_5}{\partial x} N_6 & \frac{\partial N_5}{\partial y} N_6 & \frac{\partial N_6}{\partial x} N_6 & \frac{\partial N_6}{\partial y} N_6 \end{bmatrix} d\Omega \quad [5.137]$$

$$\mathbf{H} = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{K}(S_r) \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \quad [5.138]$$

$$\mathbf{H} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_5}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial y} \\ \frac{\partial N_6}{\partial x} & \frac{\partial N_6}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial x} & \frac{\partial N_6}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_6}{\partial y} \end{bmatrix} d\Omega \quad [5.139]$$

[illegible]

$$\mathbf{S} = \int_{\Omega} \left[\frac{nS_r}{K^w} (\mathbf{N}_p)^T \mathbf{N}_p + nC_s (\mathbf{N}_p)^T \mathbf{N}_p \right] d\Omega \quad [5.140]$$

$$\mathbf{S} = \int_{\Omega} \left[\frac{nS_r}{K^w} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \end{bmatrix} [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6] + nC_s \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 \end{bmatrix} \right] d\Omega \quad [5.141]$$

$$\mathbf{S} = \int_{\Omega} n \mathbf{C}_s \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 & N_1 N_3 & N_1 N_4 & N_1 N_5 & N_1 N_6 \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 & N_2 N_3 & N_2 N_4 & N_2 N_5 & N_2 N_6 \\ N_3 N_1 & N_3 N_2 & N_3 N_3 & N_3 N_4 & N_3 N_5 & N_3 N_6 \\ N_4 N_1 & N_4 N_2 & N_4 N_3 & N_4 N_4 & N_4 N_5 & N_4 N_6 \\ N_5 N_1 & N_5 N_2 & N_5 N_3 & N_5 N_4 & N_5 N_5 & N_5 N_6 \\ N_6 N_1 & N_6 N_2 & N_6 N_3 & N_6 N_4 & N_6 N_5 & N_6 N_6 \end{bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{n S_r}{K^w} \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 & N_1 N_3 & N_1 N_4 & N_1 N_5 & N_1 N_6 \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 & N_2 N_3 & N_2 N_4 & N_2 N_5 & N_2 N_6 \\ N_3 N_1 & N_3 N_2 & N_3 N_3 & N_3 N_4 & N_3 N_5 & N_3 N_6 \\ N_4 N_1 & N_4 N_2 & N_4 N_3 & N_4 N_4 & N_4 N_5 & N_4 N_6 \\ N_5 N_1 & N_5 N_2 & N_5 N_3 & N_5 N_4 & N_5 N_5 & N_5 N_6 \\ N_6 N_1 & N_6 N_2 & N_6 N_3 & N_6 N_4 & N_6 N_5 & N_6 N_6 \end{bmatrix} d\Omega \quad [5.142]$$

$$\mathbf{f}^p = \int_{\Omega} \rho_w (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{K}(S_r) \mathbf{g} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{N}_p^T q^w d\Gamma \quad [5.143]$$

$$\mathbf{f}^p = \int_{\Omega} \rho_w \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} d\Omega - \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} q^w d\Gamma \quad [5.144]$$

$$\mathbf{f}^{p(e)} = \int_{\Omega^e} \rho^w g \frac{k_0}{\mu^l} (S_r)^3 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_5}{\partial y} \\ \frac{\partial N_6}{\partial y} \end{bmatrix} d\Omega - \int_{\Gamma^e} q^w \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \end{bmatrix} d\Gamma \quad [5.145]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{K}]_{12 \times 12} [\bar{\mathbf{u}}]_{12 \times 1} - [\mathbf{Q}]_{12 \times 6} [\bar{\mathbf{p}}]_{6 \times 1} = [\mathbf{f}^u]_{12 \times 1} \\ [\mathbf{H}]_{6 \times 6} [\bar{\mathbf{p}}]_{6 \times 1} + [\mathbf{Q}^T]_{6 \times 12} [d\bar{\mathbf{u}}/dt]_{12 \times 1} + [\mathbf{S}]_{6 \times 6} [d\bar{\mathbf{p}}/dt]_{6 \times 1} = [\mathbf{f}^p]_{6 \times 1} \end{array} \right. \quad [5.146]$$

Capítulo 6

Resultados

6.1.- Introducción

Como se ha dicho en capítulos anteriores de la tesina, la desecación en suelos arcillosos es un fenómeno complejo sobre todo por las interacciones que tienen lugar durante el proceso. La idea de proponer un nuevo modelo que simule específicamente la desecación es intentar dilucidar los principales mecanismos que gobiernan dicho fenómeno. Este capítulo se centra en el estudio cualitativo de la desecación e intenta encontrar explicación a diferentes aspectos que se observan tanto en el campo como en el laboratorio. En trabajos posteriores a esta tesina, se calibrará el modelo con resultados de laboratorio para intentar predecir al menos algunos aspectos del proceso de desecación. El aporte de este trabajo se reduce a intentar comprender algunos detalles del proceso mediante la simulación numérica. La extrema complejidad del fenómeno impide abordar de entrada todos los aspectos de los procesos que tienen lugar. Los resultados presentados aquí sin embargo muestran la utilidad del modelo y como es capaz de capturar lo esencial del proceso. La estrecha relación entre el aumento de succión y la contracción del suelo queda en evidencia. Así también queda probado como las condiciones de contorno son determinantes para que se produzca el inicio de la grieta debido a concentración de tensiones. Evidentemente esta no es la única fuente de producción de grietas.

6.2.- Análisis Cualitativo

6.2.1.- Dsecación isótropa

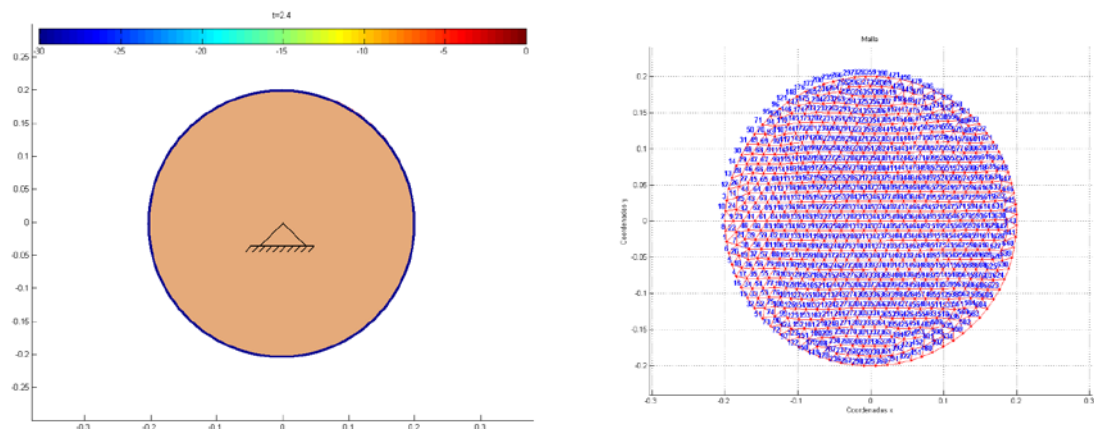


Figura 6.1.- Esquema del problema y Malla de elementos finitos de una muestra circular sometida a desecación en todo su contorno

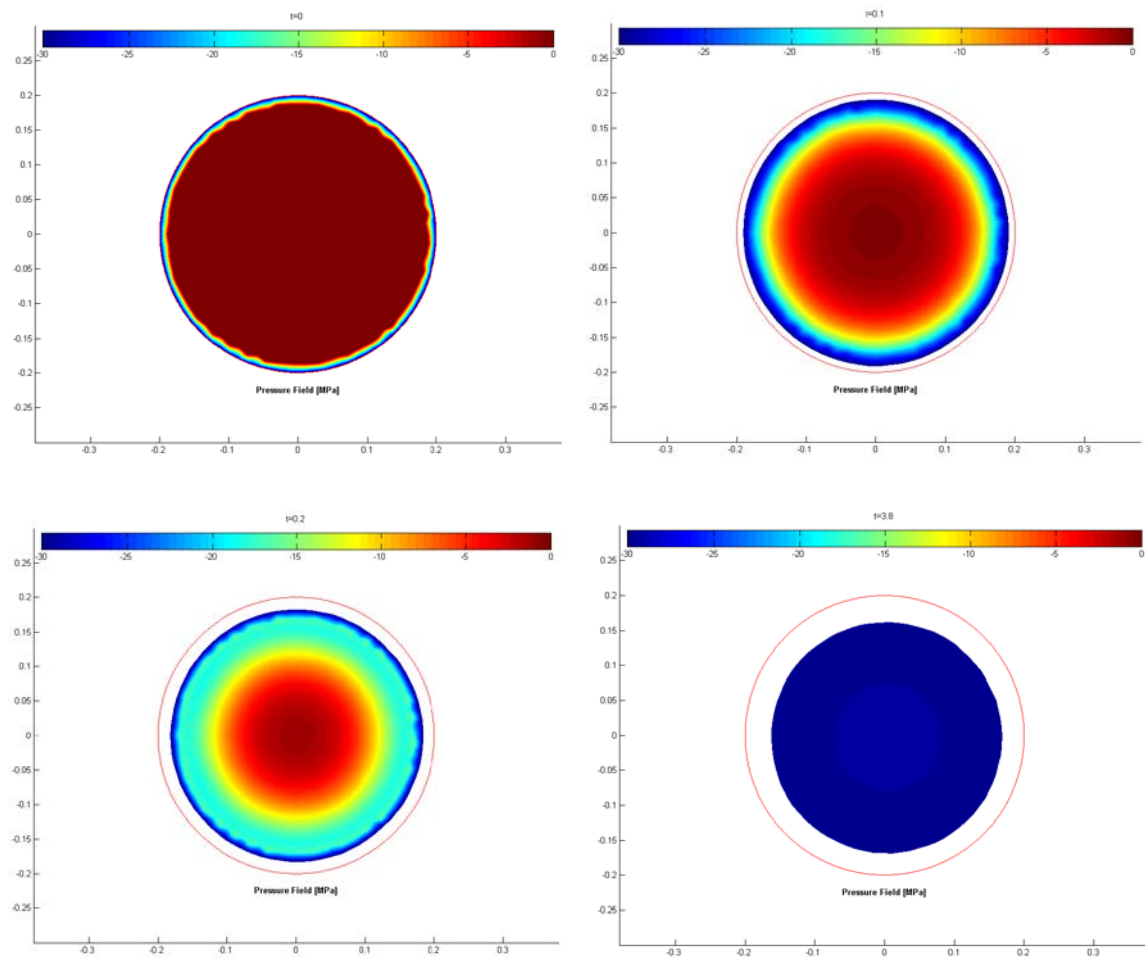


Figura 6.2.- Evolución de la desecación en una esfera considerando estado de deformación plana

Muchas veces en ingeniería es usual estudiar solo una porción del problema valiéndose de las simetrías del sistema. A la hora de estudiar la desecación tal y como se aborda en este trabajo hay que tener en cuenta que las simetrías se corresponden con la imposición de presiones de poro en el contorno, la imposición de desplazamientos (fijos) y además de la forma de la muestra. La aparición o inclusión de una grieta en el modelo puede hacer que las simetrías desaparezcan.

Un caso hipotético que presenta isotropía es la desecación de un círculo (2D) sin peso propio sobre la cual se impone una presión de poros constante en sus contornos. El esquema de trabajo y la malla de elementos finitos que se han utilizado para simular este sencillo caso se presentan en la figura 6.1. En la figura se observa una porción de suelo circular cuyas restricciones en desplazamientos se reducen a un solo apoyo fijo en su centro. Se impone una succión en el contorno de 30 MPa y se deja evolucionar el sistema.

En la figura 6.2 pueden verse los resultados obtenidos bajo las condiciones antes citadas. Puede observarse en la figura como el perfil de succión avanza con el tiempo de manera isótropa y homogénea. A medida que avanza la desecación la muestra a su vez se va contrayendo como cabía esperar. Este pequeño ejemplo sirve para confirmar que el código de elementos finitos, que materializa la formulación presentada en anteriores capítulos, permite confirmar la influencia determinante de la succión tanto en lo relativo a las acciones mecánicas como hidráulicas sobre la muestra de suelo sometida a un proceso de secado.

6.2.2.- Evolución de la presión de poros en 2D y deformación plana

En la figura 6.3 se presenta la evolución con el tiempo del perfil de presiones de poro en una muestra de suelo de 20 cm de altura. Se ha impuesto una condición de contorno en presiones de poro de -58 MPa en el borde superior y la muestra parte del estado saturado con una presión de poros homogénea en toda su masa e igual a 0 MPa. Esta evolución es típica y conocida de diversas publicaciones en la literatura. Aunque la ecuación de Richards que gobierna la infiltración de agua en un medio poroso parcialmente saturado no tiene al día de hoy una solución analítica general, si hay diversas aproximaciones para muchos casos de interés. Aunque la mayor

investigación en este campo se basa en los procesos de infiltración, todo lo conseguido para ese problema es extrapolable para el caso inverso por así decirlo de

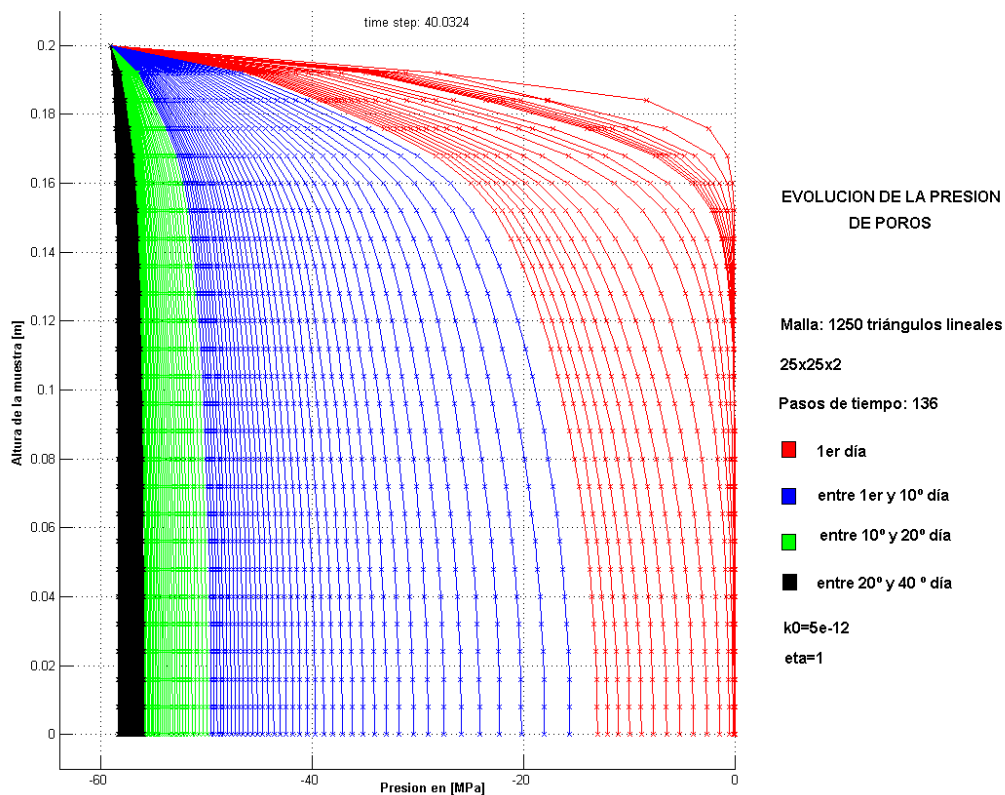


Figura 6.3.- Variación de la presión de poros en altura de una muestra de suelo en función del tiempo la desecación. Adoptando los parámetros que se muestran en la figura 6.3 puede verse que la desecación progresa hasta unos 40 días, valor que al menos en orden de magnitud es consistente con la realidad en el laboratorio.

6.2.3.- Contracción por secado

En este apartado se presentan resultados cualitativos obtenidos con el código ([Levatti et al 2009](#)). Se ha utilizado muchas variantes respecto de las condiciones de contorno en desplazamientos y condiciones de contorno en presiones de poro. El análisis de este tipo de esquemas permite interpretar el funcionamiento del modelo así como también dilucidar algunas características del proceso de secado. El efecto que tienen las condiciones de contorno y la manera de actuar de las presiones de poro se hace manifiesto en estos ejemplos. Hay que tener en cuenta además que estas condiciones son cambiantes a lo largo del proceso una vez se tengan en cuenta las grietas, tanto en su fase de iniciación como de propagación. De todas formas esto se tendrá en cuenta en apartados siguientes. Los esquemas que se han utilizado para hacer las

simulaciones son los mostrados en la Figura 6.4. Estos se corresponden con una porción de suelo de una bandeja en desecación tal como se muestra en la misma figura, considerando que el fenómeno puede analizarse en deformación plana.

Para analizar los resultados se presentan principalmente el campo de presiones de poro, por tratarse de la variable fundamental y equivalente en este caso a la succión y además el campo de tensiones horizontales. Esto último debido a que por las condiciones de contorno que se están imponiendo la mayor probabilidad corresponde a grietas verticales que se propagan verticalmente. Este hecho se ha comprobado en varios ensayos llevados a cabo en el laboratorio.

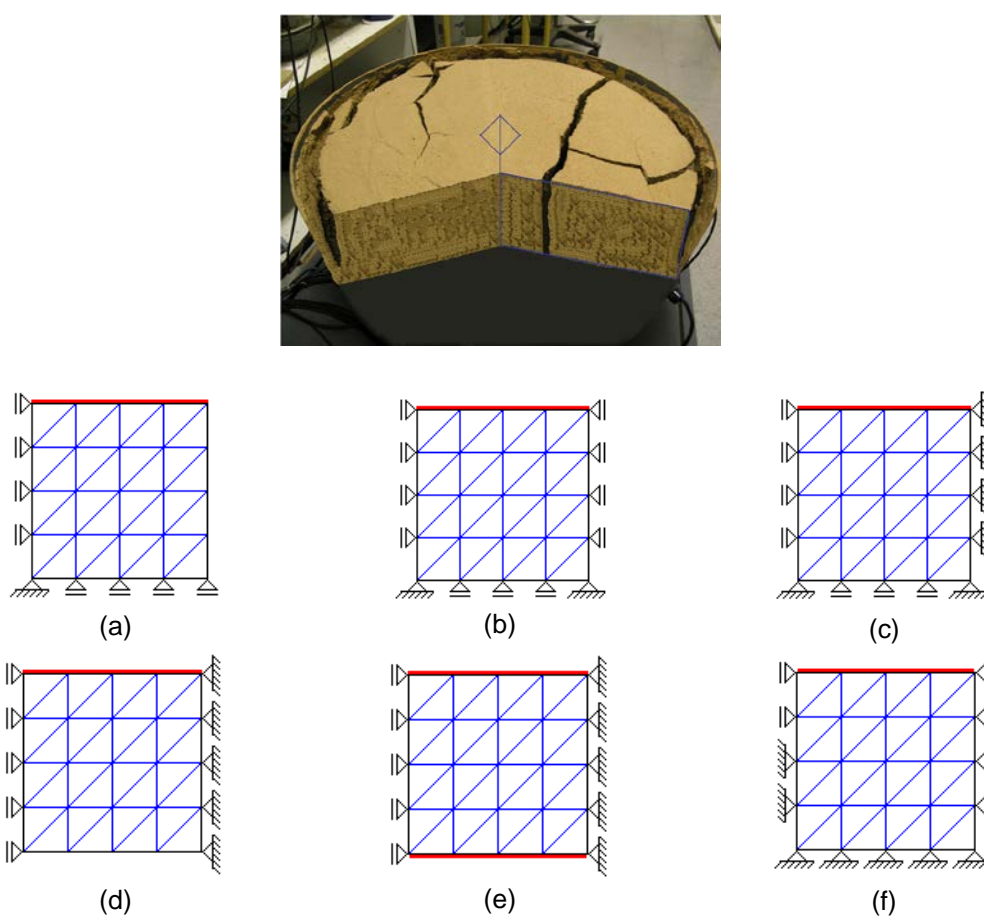


Figura 6.4.- Representación esquemática de las condiciones de contorno en desplazamiento y en presiones de poro.

6.2.4.- Esquemas (a) y (b)

Estos dos esquemas resultan muy interesantes para llegar a ciertas conclusiones del funcionamiento del modelo y para comprender ciertos aspectos de la experimentación realizada en anteriores trabajos respecto de la desecación.

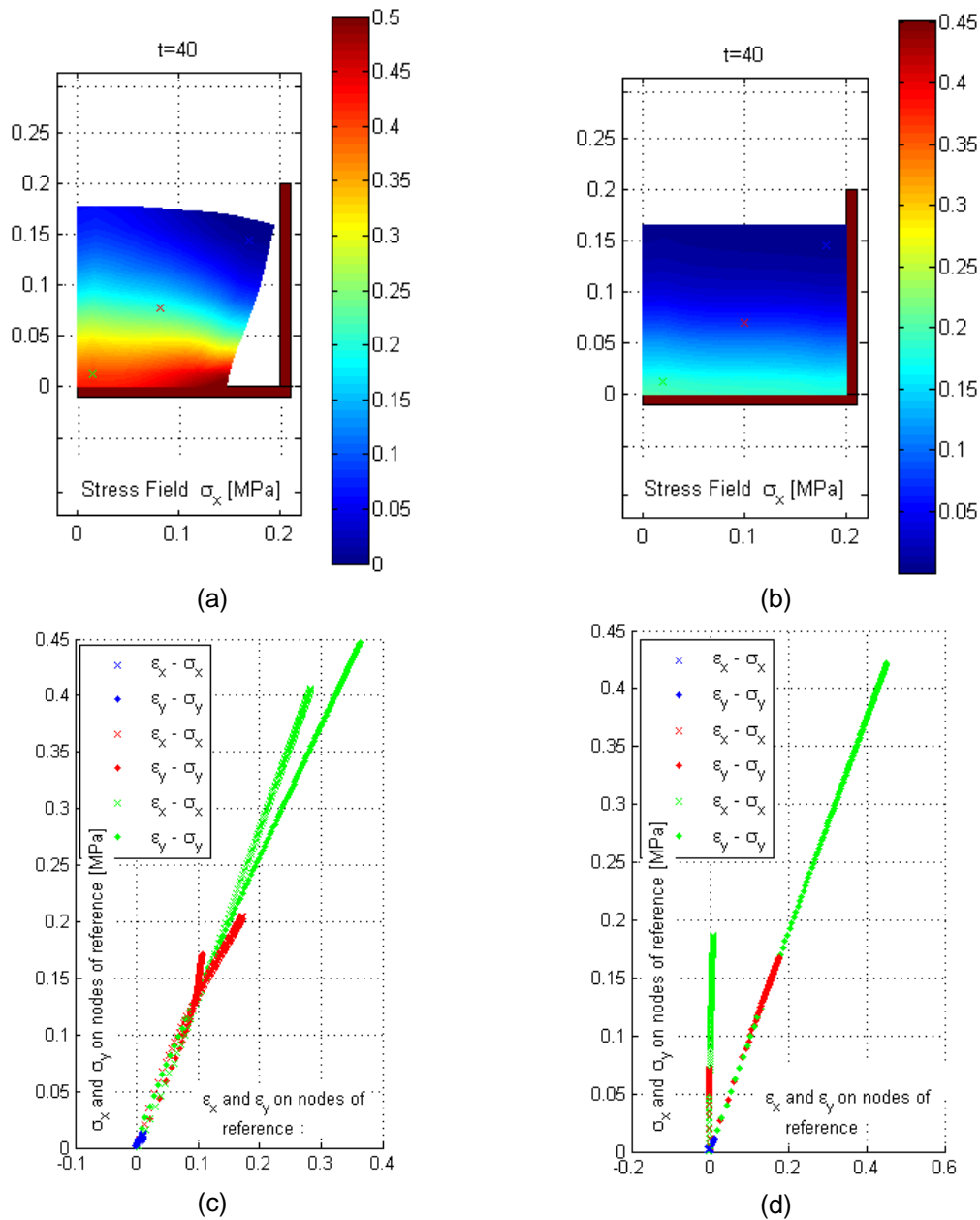


Figura 6.5.- Campo de tensiones horizontal durante el proceso de desecación (esquemas *a* y *b* en la Figura 6.4)

El primer caso (figura 6.4a), podríamos decir que no corresponde a la realidad ya que el suelo al perder contacto con la bandeja que lo sostiene (lado derecho de la muestra) entrará en contacto con el ambiente y este impondrá un valor de presión de poros de igual valor que en la cara superior. De todas formas la idea de este esquema es entender el funcionamiento del programa de elementos finitos. En la figura 6.5a vemos la configuración final de la porción de suelo simulada y su campo de tensiones horizontales. En primer lugar llama la atención que la deformación en más

pronunciada en la zona inferior de la muestra. Esto tiene su explicación en el hecho de que la rigidez de la masa de suelo depende de la presión de poros (a mayor succión mayor rigidez) y durante el proceso de secado las zonas superiores son más rígidas que las zonas inferiores de la muestra. Que todas las tensiones sean de compresión no sorprende ya que las condiciones de contorno no propician otra cosa. Es decir, no existen restricciones que favorezcan la aparición de tensiones de tracción.

Observando la configuración final del siguiente esquema, figura 6.4b, vemos que en este caso la deformación es solo unidimensional cosa esperable debido a las condiciones de contorno. Sorprende sin embargo que no aparezcan tensiones de tracción horizontales sobre todo viendo que se restringen los desplazamientos horizontales que aparecen en el esquema anterior. Esto se explica teniendo en cuenta que la relación constitutiva mecánica (Capítulo 4) es incremental. En el primer caso la deformación del suelo produce una distorsión del campo de presiones (Figura 6.5a) los cual produce incrementos de presiones de poros en la dirección horizontal. En el segundo caso esto no se produce debido a las condiciones de contorno simétricas impuestas, lo que da por resultado este comportamiento cuasi unidimensional sin que se produzcan tensiones de tracción horizontales. Las tensiones horizontales de compresión se producen simplemente por el efecto Poisson.

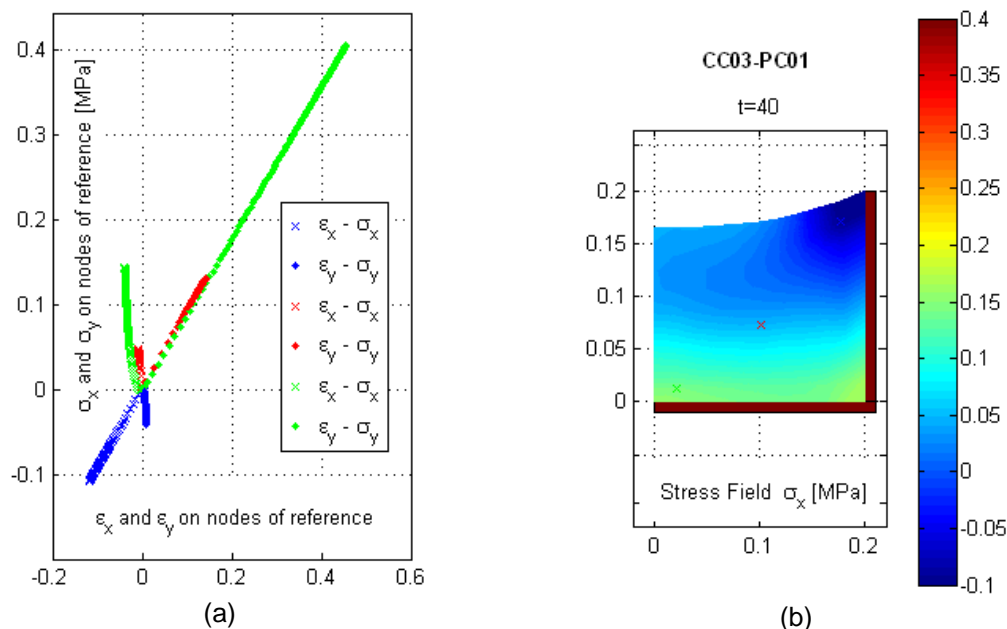


Figura 6.6.- (a) Evolución de la tensión y la deformación durante la desecación; (b) Campo de tensiones horizontales (a y b referidos al esquema de la figura 6.4c).

En la Figura 6.5c y 6.5d, se muestra la relación tensión-deformación en tres puntos de referencia (azul, rojo y verde) figura 6.5a y 6.5b en la masa de suelo.

6.2.5.- Esquema (c)

Podríamos decir que este esquema es respecto de los anteriores más realista ya que las restricciones en los movimientos impuestas en la cara derecha reproducen mejor la adherencia entre el suelo y la bandeja. De todas formas lo más importante es que este tipo de restricciones producen la aparición de tensiones horizontales de tracción, figura 6.6b, capaces de producir a su vez agrietamiento en la zona de arriba en contacto con dicha bandeja propagándose luego hacia abajo como es usual que ocurra en el laboratorio.

6.2.6.- Esquemas (d) y (e)

Estos esquemas difieren únicamente en la forma de imponer la presión de poros. En el primer caso solo en la cara superior y en el segundo en las caras superior e inferior. En ambos casos se puede ver la aparición de tensiones horizontales de tracción capaces de producir grietas tanto en la parte superior como en la inferior de la muestra aunque de mayor valor las de arriba. Esto indica a primera vista que las grietas pueden aparecer también desde el fondo de la muestra tal y como se pudo comprobar en los ensayos.

Con estos simples casos donde se ha modificado la condición de contorno del fondo de la bandeja, puede intuirse la importancia del tratamiento de la adherencia entresuelo y bandeja. El presente modelo solo permite ir de un extremo a otro, total adherencia o ninguna adherencia. Es lógico pensar que variaciones en estas restricciones produzcan diferentes resultados. El problema del tratamiento de este tipo de condiciones de contorno, es que cambian a lo largo del proceso de secado. Además de cambiar, lo hacen de manera brusca y pueden pasar de una adherencia total al despegue completo de una zona de la muestra.

Los resultados que corresponden al esquema (d) se presentan en la figura 6.7a y 6.7b. Los correspondientes al esquema (e) en la figura 6.7c y 6.7d.

6.2.7.- Esquema (f)

En este caso, debido a las condiciones de contorno impuestas aparecen tensiones horizontales de tracción también en lo que sería la mitad de la muestra circular. Es

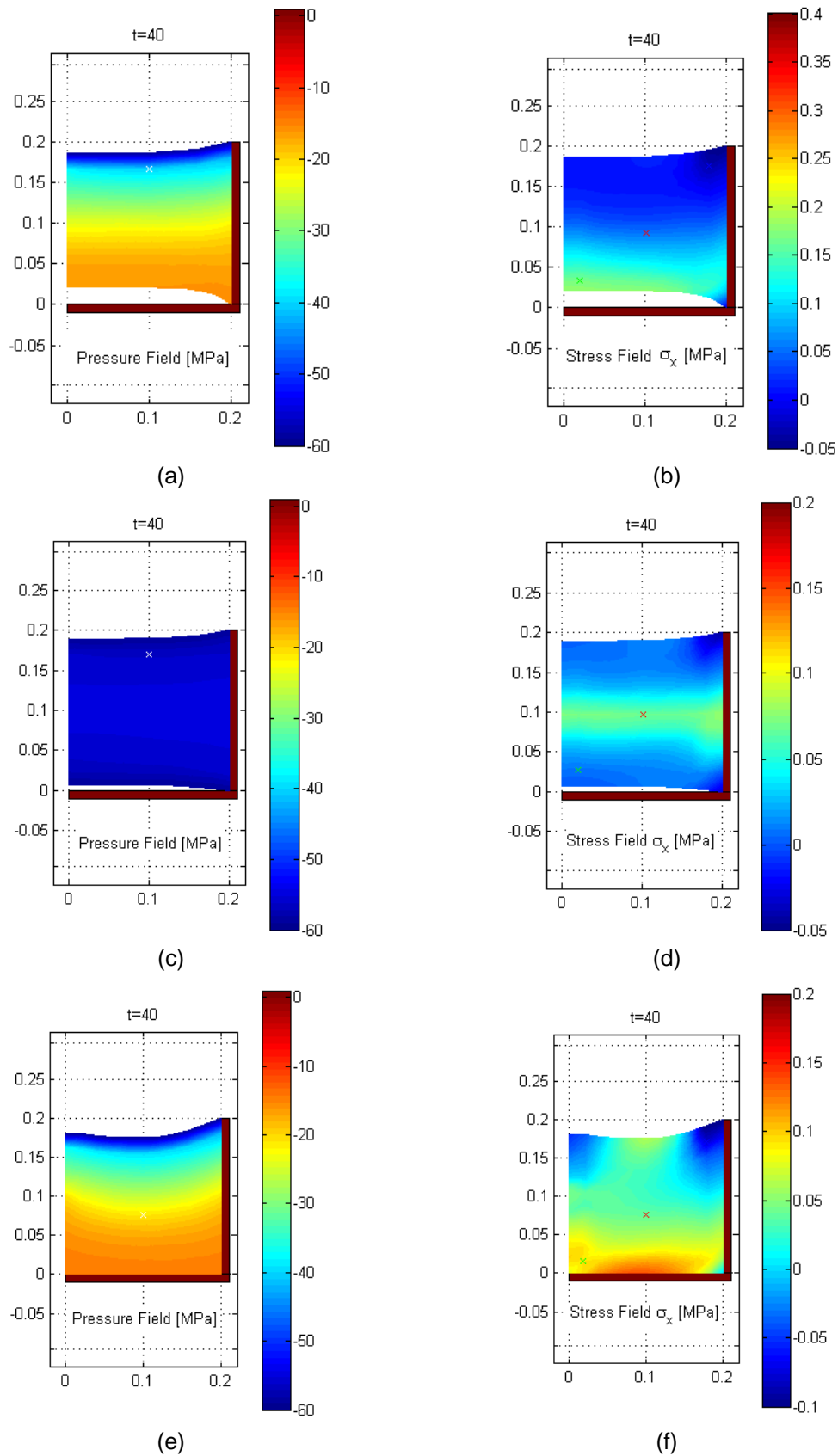


Figura 6.7.- Evolución de la tensión y la deformación durante la desecación (esquemas *d*, *e*, y *f* de la Figura 6.4)

importante poder forzar este tipo de comportamiento para poder simular el caso en que las grietas que aparecen son las del centro de la muestra precisamente. Ver figura 6.4 donde puede apreciarse en la muestra de suelo desecada una grieta debida al despegue de la bandeja en el lado derecho y una grieta central que abarca todo el espesor de dicha porción de suelo.

Para este caso los resultados se presentan en la figura 6.7e y 6.7f.

6.2.8.- Influencia de una grieta central

En este apartado se presentan los resultados obtenidos de simulaciones de secado con los esquemas que se muestran en la figura 6.8. (Levatti et al. 2009).

Se tratan de muestras de suelo que se suponen son circulares de diámetro 40 cm y de altura igual a 20 cm. El análisis se hace en 2D suponiendo deformación plana.

La intención de estas simulaciones es mostrar la influencia que tienen las grietas en el comportamiento bajo desecación del suelo. Esta influencia radica en un cambio notable sobre el estado de tensiones de la masa de suelo así como también introduce la posibilidad de que el ambiente imponga succión en la superficie que conforma la grieta en sí misma.

Se presentan los resultados de 5 simulaciones de desecación con 5 longitudes de grietas distintas de menor a mayor, esquemas 1 a 5, tal como se muestra en la figura 6.8.

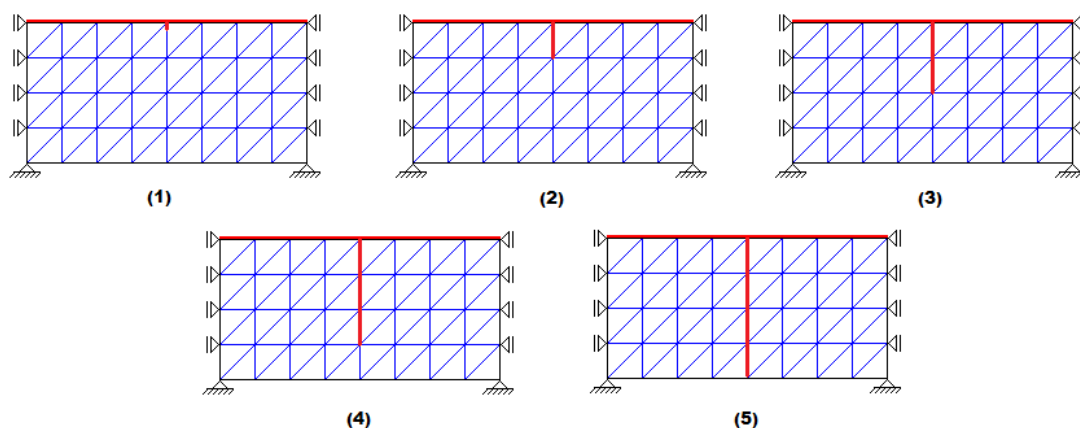


Figura 6.8.- Esquemas utilizados para la simulación

En todos los casos las condiciones de contorno en desplazamientos son las mismas. Se ha dejado expuesto el fondo de la muestra sin restricciones para ver más claramente el efecto de la longitud de la grieta en el comportamiento a contracción de la masa de suelo sujeta a desecación.

En ensayos reales es cierto que no sabemos el grado de adherencia que tiene la muestra de suelo con el fondo de la bandeja. Una idea que surge de este hecho es que debería trabajarse tanto en el laboratorio como en las simulaciones en la caracterización y modelización de la adherencia y de sus cambios a lo largo del proceso de secado.

En todos los casos presentados en este apartado, la simulación consiste en un proceso de desecación habiendo impuesto una grieta central con una longitud determinada. Está claro que en situaciones reales las grietas aparecen en un determinado momento y luego progresan.

El análisis de la aparición y progreso de las grietas queda fuera del alcance de este trabajo.

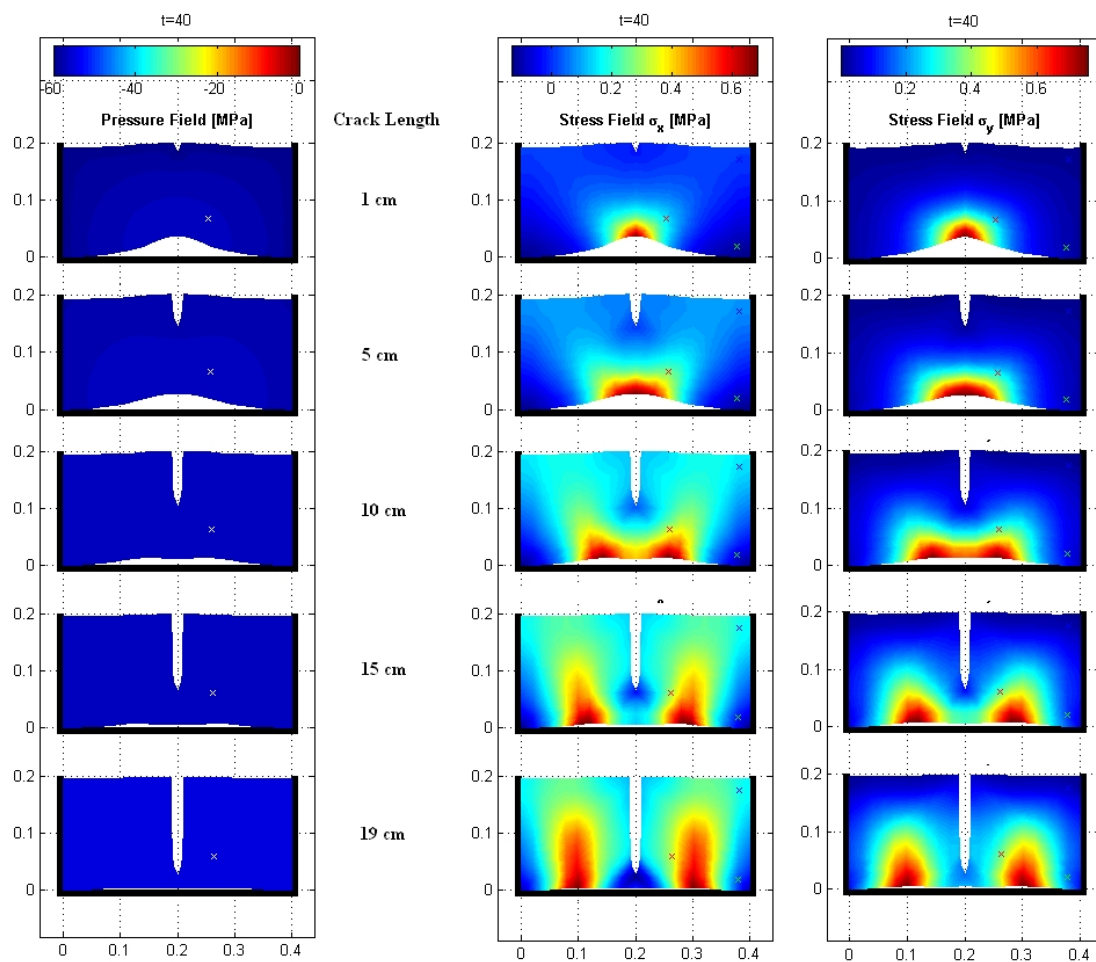


Figura 6.9.- Influencia de la longitud de una grieta central en los campos de presiones de poro y tensiones.

Con una grieta inicial de 1 cm, figura 6.9, se observa que existe una tendencia a deformar el suelo levantándolo desde el fondo. Esto provoca concentración de

tensiones de compresión en un punto localizado de la muestra, justo en la mitad del fondo de la masa de suelo.

En estas condiciones podría incluso producirse un agrietamiento en el fondo de la muestra que luego progrese hacia arriba. Para poder estudiar este fenómeno habría que plantear un modelo más complejo que permita simular el progreso de la grieta.

Lo que sí permite observar este modelo, es que a medida que la grieta impuesta inicial es más larga, el efecto de deformación se reduce. Esto se debe a lo mismo que se indicaba en el apartado 6.2.6. Las partes más cerca del contacto con el medio ambiente se vuelven más rígidas de forma temprana durante el secado, mientras que las zonas alejadas siguen siendo más blandas. En una palabra la presencia de la grieta central rigidiza más pronto el suelo cercano al fondo lo cual impide la deformación.

La grieta central a medida que es más larga produce además una alteración del campo de tensiones. Cuando las grietas es muy larga la concentración de tensiones se produce en dos focos lo cual podría eventualmente producir la aparición de nuevas grietas a partir de estos dos puntos.

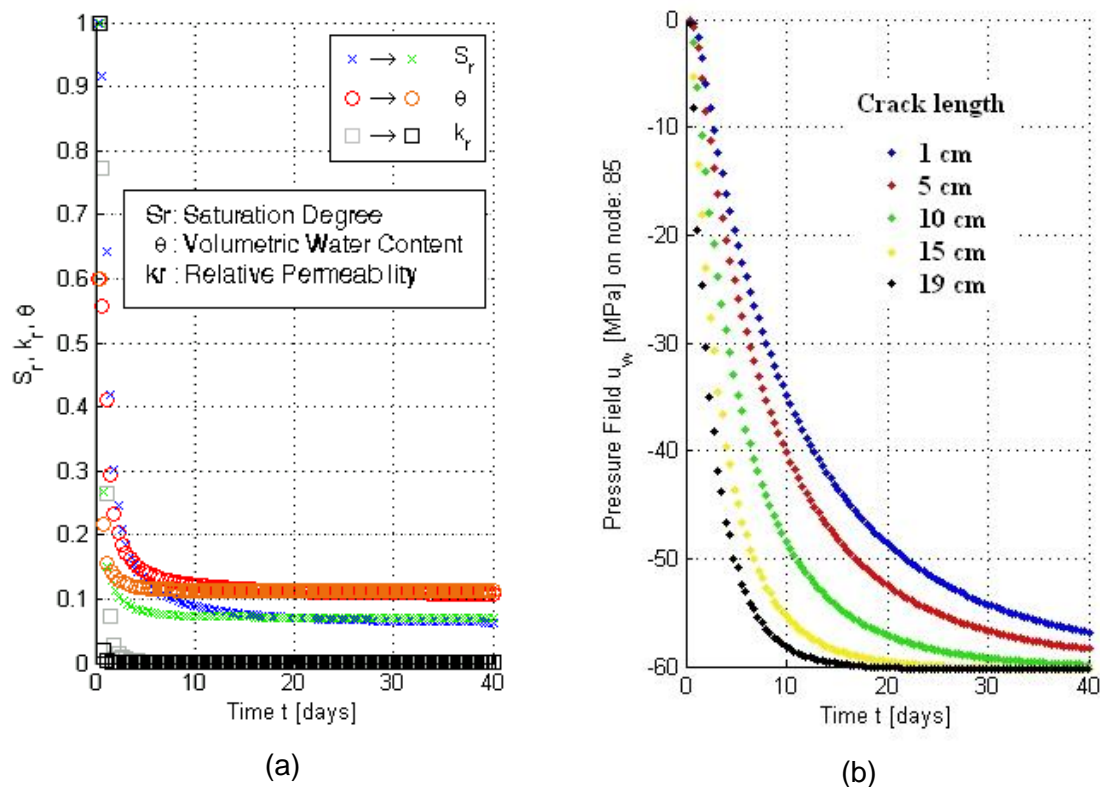


Figura 6.10.- Variación del grado de saturación y de la presión de poros para distintas longitudes de grieta

El problema para evaluar esta posibilidad es que las tensiones que aparecen en el modelo son siempre de compresión. Sería mas claro asegurar las condiciones de inicio de grieta si las tensiones fueran de tracción pero este no es el caso.

Tampoco esta estudiado si tensiones de compresión elevadas pueden producir fallo y posterior agrietamiento.

Centrándonos o lo que si podemos analizar, en la figura 6.10 vemos la influencia del tamaño de la grieta inicial sobre los parámetros del modelo.

Así por ejemplo en la figura 6.10a, vemos como varían el grado de saturación, el contenido volumétrico de agua y la permeabilidad relativa para las grietas de 1cm de 19 cm. A mayor longitud de grieta todo evoluciona más deprisa lo cual es lógico ya que se tiene mayor superficie de evaporación.

En la figura 6.10 b, vemos la evolución de la presión de poros en un punto de la muestra para las cinco longitudes de grieta inicial. También se observa aquí que a medida que la grieta es más grande, mayor es la velocidad de evolución de la presión de poros.

6.2.9.- Rizado (Curling)

Dentro del universo de posibilidades de la desecación y del fenómeno de contracción y agrietamiento de los suelos, existe un fenómeno que se denomina en inglés, curling, que consiste en la deformación muy marcada formando rizos de hojuelas de suelo tal y como se muestra en las fotos de la figura 6.11b. (Levatti et al., 2009).



Figura 6.11 (a) suelo que presenta un curling moderado; (b) suelo que presenta un curling muy marcado

Dependiendo de del tipo de suelo este fenómeno parece darse de forma más o menos acentuada. Cuando la masa de suelo es compacta y relativamente

homogénea, cada fragmento de suelo en que queda dividido luego del agrietamiento presenta esta característica tendencia a levantar los bordes hacia arriba.

Ya sea sobre una superficie dura o bien sobre un suelo muy consolidado, si una fina capa de suelo arcilloso se deposita muy fluido, la desecación resulta en el curling mostrado en la figura 6.11b.

Es evidente que el proceso depende en gran medida de la plasticidad y por tanto del tipo de suelo. También existe una dependencia del espesor de suelo sometido a desecación ya que para que el curling sea muy acentuado las fuerzas gravitatorias no deben ser considerables lo cual reduce el efecto de rizado como se ven en la figura 6.11a.

La plasticidad del suelo es fundamental para que el suelo conserve integridad durante el proceso de rizado sin resquebrajarse, lo cual viene controlado por el límite de contracción. Será lógico que para altos índices de contracción y plasticidad los suelos sean más propensos a desarrollar curling.

Para estudiar en profundidad este fenómeno es necesario realizar experiencias de laboratorio y simulaciones numéricas. A continuación se presenta un estudio experimental y numérico realizado de este fenómeno en Australia. Además se presenta la posibilidad de utilizar nuestro código propio en Matlab para simular el curling en suelos.

6.2.9.1.- Ensayo de laboratorio para estudiar el curling en arcilla de Werribee, Australia.

(Nahlawi, H y Kodikara, J. 2002), han reportado un experimento con una arcilla muy expansiva de Australia un curioso estudio a cerca del rizado (curling) que se produce al someter a este suelo a desecación.

Aunque a primera vista el rizado del suelo sometido a desecación parezca un fenómeno aislado y curioso tiene en realidad mucha más importancia y explica más de un aspecto del proceso de agrietamiento del suelo.

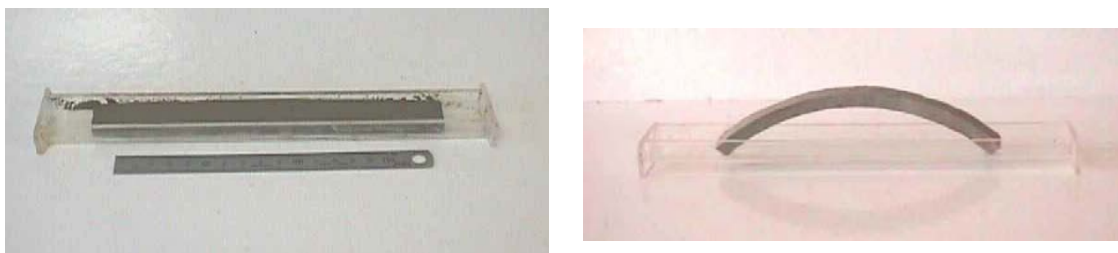


Figura 6.12.- Contracción inicial y curling final a las 65.5 hs de la arcilla de Werribee

En la figura 6.12 se observa una delgada muestra de arcilla de Werribee (250 mm x 25 mm x 12.5 mm), cuyos parámetros se resumen en la tabla 6.1, contenida en un molde aceitado para eliminar la adherencia entresuelo y bandeja. Al tercer día de desecación la muestra de arcilla adopta la forma curva que se ve en la figura 6.12.

Más curioso aún es el hecho de que a las pocas horas la muestra presenta un rizado inverso al producido al final, levantándose los extremos de la muestra hacia arriba para poco después invertir esta deformación hasta alcanzar la configuración final mostrada en la figura 6.12.

Liquid Limit	127 %
Plastic Limit	26 %
Plasticity Index	101
Specific Gravity (Gs)	2.66
Shrinkage Limit	22 %
Passing number 75 μ m sieve	96 %

Test	Temperature (°C)	Humidity (% RH)	Initial moisture content (%)
Pilot Test	16	50	127
Test 1	16	50	126.2
Test 2	18	40	127
Test 3	18	40	127

Tabla 6.1.- Propiedades de la arcilla y resumen de los ensayos de laboratorio

Los ensayos se llevaron a cabo en una cámara ambiental en miniatura para controlar las condiciones de secado. Se ensayaron varias muestras, algunas se utilizaron para medir los distintos parámetros cambiantes a lo largo del test y otras para observar el típico comportamiento bajo desecación.

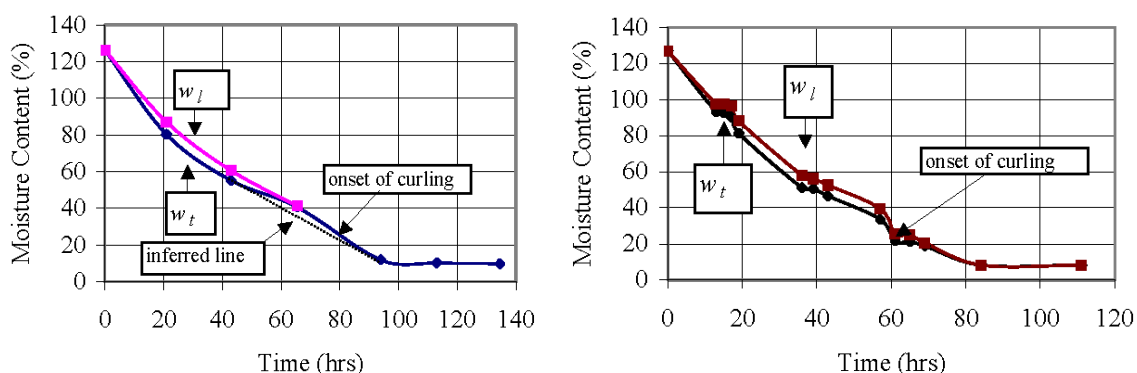


Figura 6.13.- Curva de secado del ensayo 1 y 3

En la figura 6.13 se muestra la relación entre el contenido de humedad y el tiempo de ensayo de dos muestras sobre las cuales se va midiendo el contenido de humedad tanto en la cara superior (wt) como en la cara inferior (wl). El tamaño de la muestra hace que la precisión de las mediciones puedan ser criticables, sobre todo por el hecho de que la variación de la pérdida de humedad sea al principio del ensayo mayor en la cara superior para hacerse luego menor al final del mismo y que sea esto precisamente lo que justifique el comportamiento tan particular durante este test.

La figura 6.14 muestra la relación entre el contenido gravimétrico de humedad y la succión matricial (curva de retención) y la relación entre la succión matricial y los incrementos de deformación horizontal y vertical.

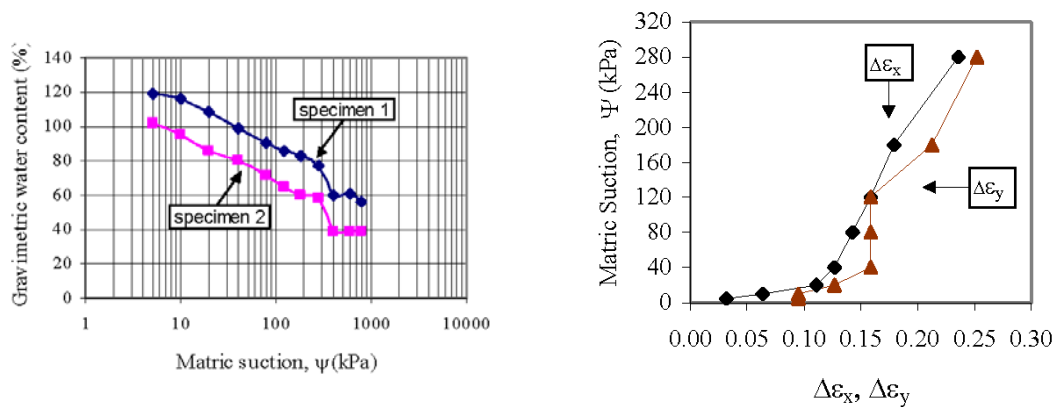


Figura 6.14.- (a) Curva de retención para las muestras 1 y 2; (b) Succión matricial vs. deformación de la arcilla de Werribee

La figura 6.15, muestra la relación que existe entre el modulo de elasticidad del suelo (H debido a cambios de succión) y la succión matricial, relación que claramente es no lineal.

Teniendo caracterizado el material usado en el ensayo, es interesante buscar una explicación a lo que ocurre durante la desecación.

Nahlawi, H y Kodikara, J. interpretan que al principio hay mayor desecación arriba que abajo y el suelo tiende a levantar los extremos. Esto se produce al inicio del ensayo cuando la muestra está muy húmeda aún y el modulo de elasticidad tangencial es pequeño. Este valor bajo del modulo E permite mucha deformación axial y poca deformación por rizado debido a que H será bastante mayor que E. Luego sin dar muchas explicaciones del porque el secado es mayor por debajo. El cambio en pérdida de humedad se justifica con las mediciones en laboratorio en muestras de 1,25 cm de espesor (difícil de ejecutar a mí entender con toda la precisión que requiere el caso).

En una segunda etapa, la muestra está más seca y por lo tanto el valor del modulo E es más grande, lo cual hace disminuir la deformación por contracción axial. Como hay mas contracción por debajo que por arriba la muestra empieza su deformación convexa, levantando su parte media, y apareciendo una componente de momento debido a la deformación (efecto de segundo orden) que va creciendo a medida que avanza el secado. Básicamente el suelo está rígido a compresión pero sometido a flexión lo cual estimula el efecto de rizado. La lámina de suelo no se parte o agrieta debido a que es muy plástica en este momento del proceso.

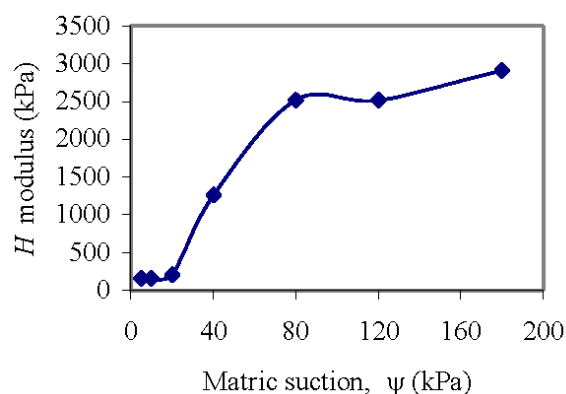


Figura 6.15.- Variación del módulo elástico H en función de la succión matricial

Una explicación alternativa puede basarse en que durante el proceso de secado las condiciones de contorno cambian. Ver ([Levatti et. al., 2009](#)).

Si el fondo del molde fuera rugoso, se producirían seguramente grietas y el curling sería cóncavo. Como la base es lisa y tiene vaselina el curling cóncavo solo se produce parcialmente y luego debido a que en la zona de abajo el suelo es menos resistente (ver casos analizados arriba en este mismo capítulo) se produce el curling convexo.

Al principio se inicia la desecación y la pérdida de humedad es sólo a través de la superficie de arriba de la muestra. Rápidamente esto produce una contracción de la muestra que permite el despegue de los bordes. A partir de este momento la pérdida de humedad es también a través de los bordes de la muestra. En un primer momento las zonas saturadas de la muestra son incompresibles por lo que el acortamiento es mayor en la zona expuesta a la atmósfera. Cuando el proceso progresa la muestra se torna no saturada por lo tanto compresible y más compresible en las zonas con mayor humedad. Así es que el curling se invierte de ser cóncavo a ser convexo y así continúa hasta el final de la desecación.

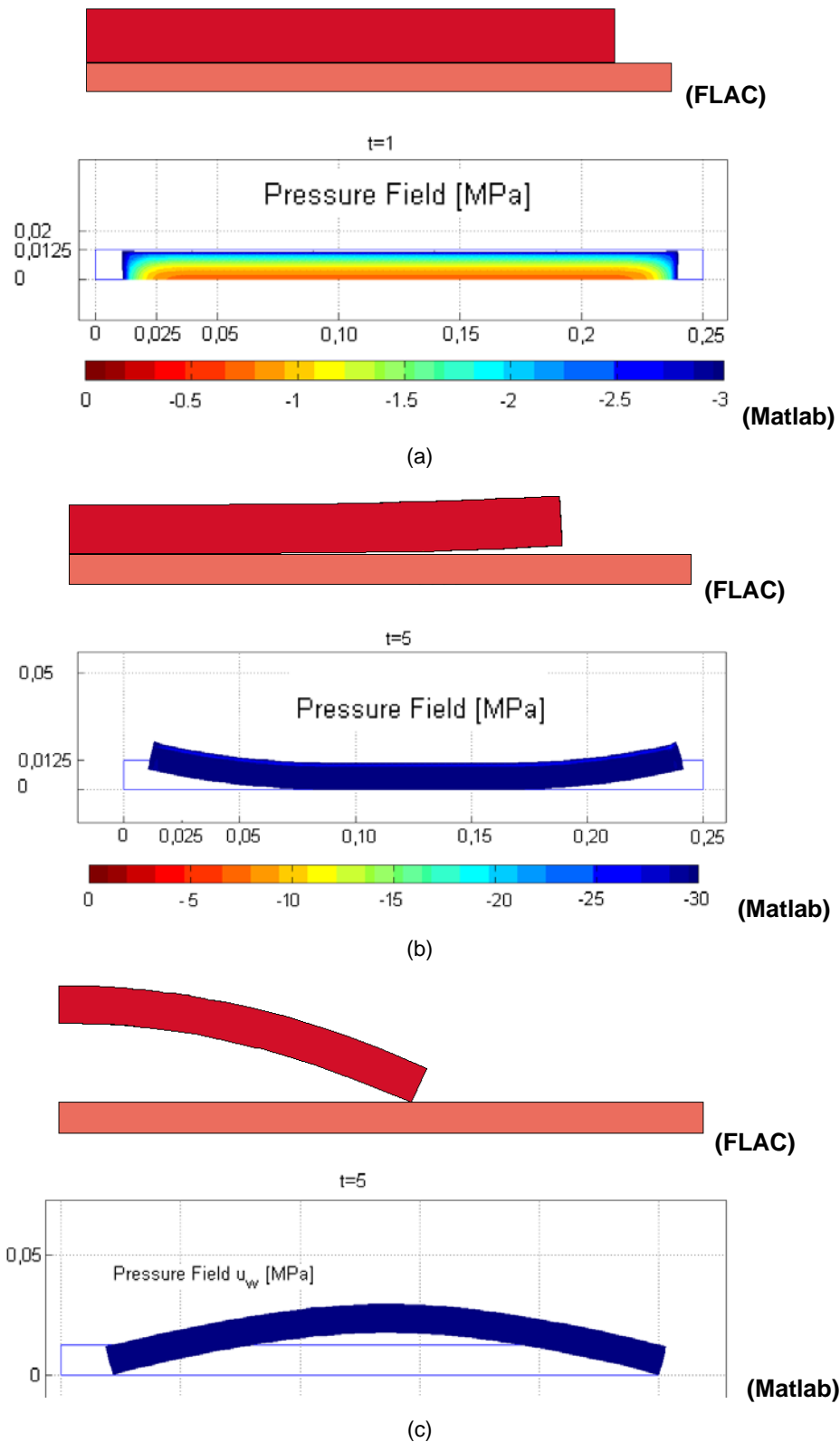


Figura 6.16.- Comparación de simulaciones hechas con FLAC y con Código Matlab.

Nahlawi, H. et. al también presentan un artículo donde utilizar el programa FLAC (Fast Lagrangian Analysis of Continua; Itasca Consulting Group, Inc. 1993) para simular el proceso observado en el laboratorio.

En la figura 6.16 se observan los resultados obtenidos con FLAC además de los resultados obtenidos con el programa y la formulación presentada en esta tesina.

Puede verse que tanto FLAC como el programa que presentamos aquí son capaces de reproducir el fenómeno de rizado del suelo.

Podemos decir que al menos existen dos explicaciones relativamente convincentes de las razones por las cuales la arcilla de Australia se comporta como se ha visto en los experimentos. Esto indica que aún existen detalles que no son bien conocidos y que necesitan un mayor estudio.

En la figura 6.16, se ven los resultados de la contracción inicial 6.16a, el rizado convexo (extremos que se levantan) en 6.16b, y finalmente el rizado cóncavo en 6.16c.

Capítulo 7

Conclusiones y Futuras Líneas de Investigación

En esta tesina se ha presentado el problema de grietas por desecación en suelos con cierto contenido de humedad tal y como es el caso de la arcilla de Barcelona. Se ha explicado brevemente en qué consiste y cuál es el problema físico que abarca este proceso tan común en la naturaleza y se han mostrado ejemplos que ilustran a que nos referimos cuando hablamos de procesos de desecación y agrietamiento.

A lo largo de la tesina se ha presentado el modelo matemático hidrodinámico propuesto y su resolución de mediante el Método de los Elementos Finitos y el Método de las diferencias Finitas.

Finalmente, se han presentado algunos resultados preliminares que muestran las capacidades del programa desarrollado en base al modelo. Los resultados son mayoritariamente cualitativos pero resuelven algunos de los interrogantes como son una de las razones de que se produzcan las grietas, la concentración de tensiones debido a ciertas condiciones de contorno, y la influencia que las grietas tienen sobre el comportamiento general de la muestra.

Los resultados dejan en evidencia la necesidad de avanzar en ciertas direcciones para obtener mejores resultados, dilucidar ciertos puntos oscuros y resolver cuestiones puntuales a la hora de simular el proceso de desecación y agrietamiento de los suelos. El tratamiento numérico de la fractura no se ha abordado porque debido a su complejidad queda fuera del alcance de esta tesina.

Este trabajo se puede considerar como un paso más y forma parte de una extensa línea de investigación en el Departamento de Ingeniería del Terreno de la Escuela de Caminos. Hasta el momento se han presentado cinco artículos de congreso [Levatti, HU et. al \(2007\)](#), [Levatti, HU et. al \(2009\) COMGEO I](#), [Levatti, HU et. al \(2009\) METNUM](#), [Levatti, HU et. al \(2009\) COMPLAS X](#) y [Prat, P. et al. \(2008\) IACMAG](#), una tesina de Máster [Levatti, H.U. \(2008\)](#) y se está trabajando en la escritura de una tesis doctoral que abarca además de aspectos numéricos, una vertiente experimental que solo se ha comentado aquí fugazmente.

Lo hecho hasta aquí, en esta tesina, deja clara la necesidad de trabajar mucho más para llegar al objetivo de poder simular este proceso de manera más completa y sobre todo cuantitativa. Son varios los frentes que hay que atacar para lograr este objetivo. De los cuales podemos mencionar los siguientes:

- Se ha visto tanto en el laboratorio, en trabajos anteriores, como en las simulaciones numéricas la fuerte influencia que tienen los contornos. Por lo tanto es necesario efectuar ensayos simples de desecación para dilucidar el efecto de las condiciones de contorno para un tipo determinado de suelo.
- Comparar resultados para distintos tipos suelos para así definir como afectan los parámetros materiales al comportamiento en desecación.
- Mejorar el tratamiento de las condiciones de contorno en presiones de poro. En la realidad el ambiente no impone bruscamente presiones de poro en el contorno del suelo sino que se trata de un proceso paulatino. Este fenómeno tiene que ver con el concepto de capa límite en el contacto entre un sólido y un gas. Una manera de hacerlo es la propuesta en el artículo de [\(Rodríguez, R et al., 2007\)](#), donde es posible simular no solo la masa de suelo sino también el aire en contacto con la muestra. Incorporar modelo de elementos juntas para tratar las grietas es indispensable ya que se ha visto que el contacto entre bandeja y suelo en el laboratorio es un proceso complejo.
- El modelo propuesto en esta tesis está fundamentalmente basado en la mecánica de suelos no saturados. El hecho de que la desecación parte del estado saturado plantea ciertos problemas a la hora de caracterizar el problema con las dos variables de estado adoptadas. Lo mejor sería adoptar una aproximación mixta que parta de la condición saturada y pueda pasar a condiciones no saturados

automáticamente. Una solución sería la adopción de una variable de estado de tensiones única tipo Bishop.

- Expandir el modelo a 3D es vital para comprender el proceso en condiciones de contorno complejas. Unas condiciones en apariencia sencillas como puede ser una bandeja de suelo en desecación en el laboratorio es sin embargo un proceso tridimensional sin lugar a dudas ya que tanto las presiones de poro como las grietas no presentan simetría alguna siquiera desde el principio del ensayo.
- Para tratar las grietas (inicio y propagación) se pueden optar por varios caminos. Las técnicas de remallado parecen ser el camino más intuitivo pero tienen un costo computacional y complejidad de implementación muy elevados. Las discontinuidades fuertes son también una opción pero en mi opinión demasiado compleja y que añaden por demás complejidad al problema numérico en sí. Creo que la opción de utilizar nuevos métodos como en XFEM son las alternativas más viables, por su mayor sencillez y menor demanda de tiempo de cálculo.
- Debería incluirse en el modelo actual conceptos de Mecánica de Fractura Lineal Elástica para el tratamiento de las grietas.
- El agrietamiento en suelos debido a desecación presenta un comportamiento claramente aleatorio. Con las técnicas que se utilizan hoy es imposible reproducir dos ensayos que den resultados incluso lo suficientemente parecidos como para pensar que un modelo determinista puede resolver el problema al completo. La misma muestra bajo las mismas condiciones de desecación da resultados distintos cada vez que se ensaya. Aunque se han visto ciertos patrones, estos parecen confusos y a veces contradictorios. No sería una mala idea intentar abordar el problema, aunque sea parcialmente, utilizando conceptos y modelos probabilísticos. Por ejemplo, a la hora de determinar donde se producirán las grietas dentro de la masa de suelo.
- Desde el punto de vista numérico puede ser provechoso trabajar con mayor número de elementos y quizás cambiar el entorno de trabajo a Fortran o C++ una vez se tenga un código depurado y optimizado en el entorno Matlab.

Referencias

Por orden alfabético

- Abu-Hejleh, A. N. and Znidarcic, D. **Desiccation theory for soft cohesive soils.** ASCE, *Journal of Geotechnical Engineering*, 121 6:493–502. 1995.
- Aitchison, G. D. **Soil properties, shear strength, and consolidation.** *Proc., 6th Int. Conf. SMFE, University of Toronto Press, Toronto*, 319–321. 1965.
- Ávila Álvares, Guilermo E. **Estudio de la retracción y el agrietamiento de arcillas. Aplicación a la arcilla de bogotá.** *PhD thesis, Geotechnical Departament, UPC, Barcelona.* 2004.
- Biot, Maurice A. **General Theory of Three-Dimensional Consolidation.** *Journal of Applied Physics* **12**, 155-164. 1941.
- Bishop, A.W. **The Principles of Effective Stress.** *Tek. Ukebl.* **39**, 859-863. 1959
- Bishop, A.W. and Blight, G.E. **Some aspects of effective stress in saturated and partly saturated soils.** *Geotechnique*, **13**, N° 3, 177-197. 1963.
- Blight, G.E. **A study of effective stresses for volume change.** *Proceedings of a symposium on moisture equilibria and moisture changes in soils beneath covered areas*, pp. 259-269. Sydney: Butterworths. 1965.
- Burland, J.B. **Some aspects of the mechanical behavior of partly saturated soil.** *Proceedings of a symposium on moisture equilibria and moisture changes in soils beneath covered areas*, pp. 270-278. Sydney: Butterworths. 1965.
- Chertkov, V. Y. and Ravina, I. **Shrinking-swelling phenomenon of clay attributed to capillary-crack network.** *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 34:61–71. 2000.
- Chudnovsky, A., Sadda, A., and Lesser, J. A. **Micromechanics of deformation in fracture of over consolidated clays.** *Canadian Geotechnical Journal*, 25:213–221. 1988.
- Corte, A. and Higashi, A. **Experimental research on desiccation cracks in soil.** *U. S. Army Snow Ice and Permafrost Research Establishment*, Report No. 66: Corps of Engineers Wilmette Illinois U. S. A. 1960.
- Edorgan, F., Sih, G.C. **On the crack extensión in plates under plane loading and transverse shear.** *J. Basic Engrg., ASME*, 85(4), 519-527. 1963.
- Fang, H. Y. **Introduction to Environmental Geotechnology, volume 14 of New Directions in Civil Engineering.** CRC Press. 1997.

- Fredlund, Delwyn G. and Morgenstern, Norbert R. **Stress State Variables for Unsaturated Soils.** *International Journal of Rock Mechanics and Mining Science & Geomechanics*, Vol.14, Issue 4, Page 56. July 1977.
- Fredlund, D.G. and Morgenstern, N.R.J. **Stress State Variables for Unsaturated Soils.** *Geotech. Engng. Div. ASCE*, V103, NGT5, 1977, pp. 447-466. 1977.
- Harison, J. A. and Hardin, B. O. **Cracking in clays -solutions to problems in earth structures.** *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 187: 467-484. 1994.
- Ingraffea, A.R. **On discrete fracture propagation in rock loaded in compression.** *Proc., First Int. Conf. on Numerical Methods in Fracture Mechanics*, Swansea, U.K. 235-248. 1978.
- Jennings, J.E. and Burland, J.B. **Limitations to the use of effective stress in partly saturated soils.** *Geotechnique*, **12**, N° 2, 125-144. 1962.
- Konrad, J. M. and Ayad, R. **Desiccation of a sensitive clay: Field experimental observations.** *Canadian Geotechnical Journal*, **34**:929-942. 1997a.
- Konrad, J.M. and Ayad, R. **An idealized framework for the analysis of cohesive soils undergoing desiccation.** *Canadian Geotechnical Journal*, **34**:477-488. 1997b.
- Lachenbruch, A. H. **Depth and spacing of tension cracks.** *Journal of Geophysical Research*, **66** 12: 4273-4292. 1961.
- Lakshmikantha, M.R. **Experimental and Theoretical analysis of cracking in drying soils.** *PhD thesis, Geotechnical Departament, UPC, Barcelona.* 2009.
- Lee, F. H., Lo, K. W., and Lee, S. L. **Tension crack development in soils.** *ASCE Journal of Geotechnical Engineering*, **114** 8: 915-929. 1988.
- Levatti, H.U.; Prat, P. and Ledesma, A. **Numerical modeling of formation and propagation of drying cracks in soils.** *IX International Conference on Computational Plasticity. Fundamentals and Applications. COMPLAS IX.* 5-7 September, Barcelona, Spain 2007.
- Levatti, H.U. **Formulació e Implementació tipo u-p de un Modelo Mecánico para el Análisis de la Desecación en Suelos.** *Master Thesis, Universitat Politècnica de Catalunya & CIMNE.* Barcelona, Spain. 2008.
- Levatti, H.U.; Prat, P. and Ledesma, A. **Numerical modeling of desiccation processes in clayey soils.** *Proceedings of the 1st International Symposium on Computational Geomechanics (ComGeo I), Juan-les-Pins, Cote d'Azur, France, April 29 to May 1st, 2009. COMGEO I.* 2009.
- Levatti, H.U.; Ledesma, A. and Prat, P. **Desecación y Deformación de suelos arcillosos.** *Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería. METNUM.* 29th June to 2nd July 2009.
- Levatti, H.U.; Prat, P. and Ledesma, A. **Influence of cracking in the desiccation process of clay soils.** *X International Conference on Computational Plasticity. Fundamentals and Applications. COMPLAS X.* 2-4 September, Barcelona, Spain 2009.
- Lloret, A., and Alonso, E.E. **State surfaces for partially saturated soils.** *In Proceedings of the 11th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, San Francisco, Calif., 12-16 August 1985. Edited by Publications Committee of XI ICSMFE. A.A. Balkema, Rotterdam, the Netherlands. Vol. **2**, pp. 557-562. 1985.
- Matyas, E. L. and Radhakrishna, H. S. **Volume change characteristics of Partially Saturated Soils.** *Geotechnique*, **18**: 432-448. 1968.
- Morris, P.H., Graham, J. and Williams, D. J. **Cracking in drying soils.** *Canadian*

- Geotechnical Journal*, 29: 263–277. 1992.
- Morris, P. H., Graham, J., and Williams, D. J. **Crack depths in drying clays using fracture mechanics.** *Fracture Mechanics Applied to Geotechnical Engineering ASCE Geotechnical Special Publication*, pages 40–53. 1994.
 - Nahlawi and Kodikara. **Laboratory experiments on desiccation cracking of thin soil layers.** *Geotechnical and Geological Engineering*, **24**(6):1641-1664. 2006
 - Hu, L., Peron, H., Hueckel, T. and Laloui, L. **Numerical and phenomenological study of desiccation of soil.** *Advances in unsaturated soil, seepage and environmental geomechanics*, GSP 148 ASCE 166:173. Lu, N., Hoyos, R.L. and Reddi, L. (eds). 2006.
 - Prat, P. C., Ledesma, A., and Cabeza, L. **Drying and cracking of soils: numerical modelling.** In *8th Int. Conference on Numerical Models in Geomechanics*, NUMOG VIII, pages 705–711, Rome, Italy. 2002.
 - Prat, P., Ledesma, A., Lakshmikantha, M.R., Levatti, H.U. and Tapia, J.. **Fracture Mechanics for Crack Propagation in Drying Soils.** *12th IACMAG*. 1-6 October, 2008. Goa, India.
 - Rodríguez, R.L. **Estudio experimental del flujo y transporte de cromo, níquel y manganeso en residuos de la zona minera de Moa (CUBA): Influencia del comportamiento hidromecánico.** *PhD thesis, Geotechnical Departament, UPC, Barcelona.* (2002).
 - Rodríguez, R., Sánchez, M., Ledesma, A., and Lloret, A. **Experimental and numerical analysis of desiccation of a mining waste.** *Canadian Geotechnical Journal*, 44(6):644-658, 2007.
 - Sadda, A. S., Bianchini, G. F., and Liang, L. **Cracks, bifurcation and shear bands propagations in saturated clays.** *Géotechnique*, 44 1:35–64. 1994a.
 - Towner, G. D. **The mechanics of cracking of drying clay.** *Journal of Agricultural Engineering Research*, 36: 115–124. 1987.
 - Van Genuchten, M.Th. **Closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils.** *Soil Science Society of American Journal*, v 44, n 5, Sep-Oct, pages 892-898. 1980.
 - Weinberger, R. **Initiation and growth of cracks during desiccation of stratified muddy sediments.** *Journal of Structural Geology*, 21:379–386. 1999.

Por Capítulos

Capítulo 1 - Introducción y objetivos

- Abu-Hejleh, A. N. and Znidarcic, D. **Desiccation theory for soft cohesive soils.** ASCE, *Journal of Geotechnical Engineering*, 121 6:493–502. 1995.
- Chertkov, V. Y. and Ravina, I. **Shrinking-swelling phenomenon of clay attributed to capillary-crack network.** *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 34:61–71. 2000.
- Chudnovsky, A., Sadda, A., and Lesser, J. A. **Micromechanics of deformation in fracture of over consolidated clays.** *Canadian Geotechnical Journal*, 25:213–221. 1988.
- Edorgan, F., Sih, G.C. **On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear.** *J. Basic Engrg., ASME*, 85(4), 519-527. 1963.
- Ingraffea, A.R. **On discrete fracture propagation in rock loaded in compression.** *Proc., First Int. Conf. on Numerical Methods in Fracture Mechanics*, Swansea, U.K. 235-248. 1978.
- Hu, L., Peron, H., Hueckel, T. and Laloui, L. **Numerical and phenomenological study of desiccation of soil.** *Advances in unsaturated soil, seepage and environmental geomechanics*, GSP 148 ASCE 166:173. Lu, N., Hoyos, R.L. and Reddi, L. (eds). 2006.

Capítulo 2 - Características del material a simular

- Ávila Álvares, Guillermo E. Estudio de la retracción y el agrietamiento de arcillas. Aplicación a la arcilla de bogotá. **PhD thesis**, *Geotechnical Departament, UPC, Barcelona*. 2004.
- Konrad, J. M. and Ayad, R. Desiccation of a sensitive clay: Field experimental observations. *Canadian Geotechnical Journal*, **34**:929–942. 1997a.
- Konrad, J.M. and Ayad, R. An idealized framework for the analysis of cohesive soils undergoing desiccation. *Canadian Geotechnical Journal*, 34:477–488. 1997b.
- Lakshmikantha, M.R. Experimental and Theoretical analysis of cracking in drying soils. **PhD thesis**, *Geotechnical Departament, UPC, Barcelona*. 2009.
- Nahlawi and Kodikara. Laboratory experiments on desiccation cracking of thin soil layers. *Geotechnical and Geological Engineering*, **24**(6):1641-1664. 2006.
- Rodríguez, R.L. Estudio experimental del flujo y transporte de cromo, níquel y manganeso en residuos de la zona minera de Moa (CUBA): Influencia del comportamiento hidromecánico. **PhD thesis**, *Geotechnical Departament, UPC, Barcelona*. (2002).

Capítulo 3 - Procesos físicos

- Corte, A. and Higashi, A. (1960). Experimental research on desiccation cracks in soil. *U. S. Army Snow Ice and Permafrost Research Establishment*, Report No. 66: Corps of Engineers Wilmette Illinois U. S. A.
- Fang, H. Y. Introduction to Environmental Geotechnology, volume 14 of *New Directions in Civil Engineering*. CRC Press. 1997.
- Harison, J. A. and Hardin, B. O. Cracking in clays -solutions to problems in earth structures. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 187: 467–484. 1994.
- Lee, F. H., Lo, K. W., and Lee, S. L. Tension crack development in soils. *ASCE Journal of Geotechnical Engineering*, 114 8: 915–929. 1988.
- Morris, P. H., Graham, J., and Williams, D. J. Crack depths in drying clays using fracture mechanics. Fracture Mechanics Applied to Geotechnical Engineering *ASCE Geotechnical Special Publication*, pages 40–53. 1994.
- Morris, P. H., Graham, J., and Williams, D. J. Cracking in drying soils. *Canadian Geotechnical Journal*, 29(2): 263–277. 1992.
- Prat, P., Ledesma, A., Lakshmikantha, M.R., Levatti, H.U. and Tapia, J.. Fracture Mechanics for Crack Propagation in Drying Soils. *12th IACMAG*. 1-6 October, 2008. Goa, India.
- Sadda, A. S., Bianchini, G. F., and Liang, L. Cracks, bifurcation and shear bands propagations in saturated clays. *Géotechnique*, 44 1:35–64. 1994a.
- Weinberger, R. Initiation and growth of cracks during desiccation of stratified muddy sediments. *Journal of Structural Geology*, 21:379–386. 1999.

Capítulo 4 - Modelo hidromecánico

- Aitchison, G. D. Soil properties, shear strength, and consolidation. *Proc., 6th Int. Conf. SMFE, University of Toronto Press, Toronto*, 319–321. 1965.
- Bishop, A.W. The Principles of Effective Stress. *Tek. Ukebl.* 39, 859-863. 1959
- Bishop, A.W. and Blight, G.E. Some aspects of effective stress in saturated and partly saturated soils. *Geotechnique*, 13, Nº 3, 177-197. 1963.
- Blight, G.E. A study of effective stresses for volume change. *Proceedings of a symposium on moisture equilibria and moisture changes in soils beneath covered areas*, pp. 259-269. Sydney: Butterworths. 1965.
- Burland, J.B. Some aspects of the mechanical behavior of partly saturated soil. *Proceedings of a symposium on moisture equilibria and moisture changes in soils beneath covered areas*, pp. 270-278. Sydney: Butterworths. 1965.
- Fredlund, D.G. and Morgenstern, N.R.J. Stress State Variables for Unsaturated Soils. *Geotech. Engng. Div. ASCE*, V103, NGT5, 1977, pp. 447-466. 1977.
- Jennings, J.E. and Burland, J.B. Limitations to the use of effective stress in partly saturated soils. *Geotechnique*, 12, Nº 2, 125-144. 1962.
- Lachenbruch, A. H. Depth and spacing of tension cracks. *Journal of Geophysical Research*, 66 12: 4273–4292. 1961.
- Levatti, H.U.; Prat, P. and Ledesma, A. Numerical modeling of formation and propagation of drying cracks in soils. *IX International Conference on Computational Plasticity. Fundamentals and Applications. COMPLAS IX*. 5-7 September, Barcelona, Spain 2007.
- Levatti, H.U. Formulación e Implementación tipo u-p de un Modelo Mecánico para

- el Análisis de la Desecación en Suelos. (Formulation and implementation u-p type of a mechanical model for desiccation analysis in soils). *Master Thesis*, Universitat Politècnica de Catalunya & CIMNE. Barcelona, Spain. 2008.
- Lloret, A., and Alonso, E.E. State surfaces for partially saturated soils. In **Proceedings of the 11th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, San Francisco, Calif., 12–16 August 1985. Edited by Publications Committee of XI ICSMFE. A.A. Balkema, Rotterdam, the Netherlands.** Vol. 2, pp. 557–562. 1985.
 - Matyas, E. L. and Radhakrishna, H. S. Volume change characteristics of partially saturated soils. *Geotechnique*, **18**: 432–448. 1968.
 - Prat, P. C., Ledesma, A., and Cabeza, L. Drying and cracking of soils: numerical modelling. In *8th Int. Conference on Numerical Models in Geomechanics, NUMOG VIII*, pages 705–711, Rome, Italy. 2002.
 - Towner, G. D. The mechanics of cracking of drying clay. *Journal of Agricultural Engineering Research*, **36**: 115–124. 1987.
 - Van Genuchten, M.Th. **Closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils.** *Soil Science Society of American Journal*, v 44, n 5, Sep-Oct, pages 892–898. 1980.

Capítulo 6 - Resultados

- Levatti, H.U.; Prat, P. and Ledesma, A. Numerical modeling of desiccation processes in clayey soils. *Proceedings of the 1st International Symposium on Computational Geomechanics (ComGeo I), Juan-les-Pins, Cote d'Azur, France, April 29 to May 1st, 2009. COMGEO I.* 2009.
- Levatti, H.U.; Ledesma, A. and Prat, P. Desecación y Deformación de suelos arcillosos. (Desiccation and deformation in clayey soils). Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería. *METNUM*. 29th June to 2nd July 2009.
- Levatti, H.U.; Prat, P. and Ledesma, A. Influence of cracking in the desiccation process of clay soils. *X International Conference on Computational Plasticity. Fundamentals and Applications. COMPLAS X*. 2-4 September, Barcelona, Spain 2009.
- Nahlawi and Kodikara. **Laboratory experiments on desiccation cracking of thin soil layers.** *Geotechnical and Geological Engineering*, **24**(6):1641–1664. 2006

Capítulo 7 - Conclusiones y futuras líneas de investigación

- Rodríguez, R., Sánchez, M., Ledesma, A., and Lloret, A. Experimental and numerical analysis of desiccation of a mining waste. *Canadian Geotechnical Journal*, **44**(6):644–658, 2007
- Levatti, H.U.; Prat, P. and Ledesma, A. **Numerical modeling of formation and propagation of drying cracks in soils.** *IX International Conference on Computational Plasticity. Fundamentals and Applications. COMPLAS IX*. 5-7 September, Barcelona, Spain 2007.
- Levatti, H.U. **Formulación e Implementación tipo u-p de un Modelo Mecánico para el Análisis de la Desecación en Suelos.** *Master Thesis*, Universitat Politècnica de Catalunya & CIMNE. Barcelona, Spain. 2008.

Referencias

- Levatti, H.U.; Prat, P. and Ledesma, A. **Numerical modeling of desiccation processes in clayey soils.** *Proceedings of the 1st International Symposium on Computational Geomechanics (ComGeo I), Juan-les-Pins, Cote d'Azur, France, April 29 to May 1st, 2009. COMGEO I.* 2009.
- Levatti, H.U.; Ledesma, A. and Prat, P. **Desecación y Deformación de suelos arcillosos.** *Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería. METNUM.* 29th June to 2nd July 2009.

Bibliografía

- [1] Arana, J y Gonzales, J.J. **Mecánica de Fractura**. Servicio Editorial UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO. ISBN 84-8373-455-9
- [2] Chen, W. F. and Mizuno, E. **Nonlinear analysis in soil mechanics**. Theory and implementation –Elsevier. 1990. ISBN-10: 0444430431 | ISBN-13: 978-0444430434
- [3] Fredlund, D.G and Rahardjo, H. **Soils mechanics for unsaturated soils**. WILEY INTER-SCIENCE. © 1993. ISBN-10: 047185008X | ISBN-13: 978-0471850083
- [4] Gonzalez, J.L. **Mecánica de Fractura**. Ediciones Limusa. ©2004. ISBN-10: 681861302 | ISBN-13: 978-9681861308
- [5] Lambe, T.W. **Mecánica de Suelos (Spanis edition)**. Ediciones Limusa. ©2008. ISBN-10: 9681818946 | ISBN-13: 978-9681818944
- [6] Lewis, R.W and Schrefler, B.A. **The finite element method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation in Porous Media**. WILEY(Second edition). ©1998. ISBN-10: 0471928097 | ISBN-13: 978-0471928096
- [7] Lopez Cela, J.J. **Mecánica de los Medios Contínuos**. Ediciones de la Universidad de Castilla-La Mancha. ©1999. ISBN 84-8427-030-0
- [8] Oliver, X. y Agelet, C. **Mecánica de Medios Contínuos para Ingenieros**. Ediciones UPC. 2002. ISBN 84-8301-582-X
- [9] Oñate, E. **Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos**. Ediciones CIMNE. ©1995. ISBN: 84-87867-00-6
- [10] Pérez, Cesar. **Matlab y sus aplicaciones en las ciencias y la ingeniería**. Pearson Education. ©2002. ISBN-10: 8420535370 | ISBN-13: 978-8420535371
- [11] Spencer, A.J.M. **Continuum Mechanics**. Dover. ©1980. ISBN 0-486-43594-6
- [12] Zienkiewicz, O. C. and Morgan, K. **Finite Elements and Approximation**. Dover. ©1983. ISBN 0-486-45301-4
- [13] Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. **The Finite Element Method. Solid Mechanics**. BUTTERWORTH-HEINEMANN (Fifth edition). ©2000. ISBN-10: 0750650494 | ISBN-13: 978-0750650496
- [14] Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. **The Finite Element Method. The Basis**. BUTTERWORTH-HEINEMANN (Fifth edition). ©2000. ISBN-10: 0750650559 | ISBN-13: 978-0750650557

Notación y Símbolos

Tensiones

σ_{ij} ó σ : Tensor de tensiones totales de Cauchy (tracciones positivas).

σ_{ij}^{neta} ó σ^{neta} : Tensor de tensiones netas.

σ_m^{neta} : Tensión media neta.

s : Succión matricial.

u_w : Presión de agua (compresiones positivas), (magnitud escalar)

u_a : Presión de aire (compresiones positivas), (magnitud escalar)

Deformaciones

ε_{ij} ó ε : Tensor de deformaciones infinitesimales, son las deformaciones del esqueleto de suelo (recordar que son funciones de los desplazamientos de las partículas del suelo).

ε_v : Deformación volumétrica del esqueleto de suelo debida a acciones mecánicas (tensiones netas)

ε_v^s : Deformación volumétrica del esqueleto de suelo debida al efecto de la succión (efecto hidráulico)

Rigideces

C_{ijkl} : Tensor de rigidez (Stiffness)

D_{ijkl} : Tensor de flexibilidad (Compliance)

Desplazamientos

u_i ó \mathbf{u} : Vector de desplazamientos de las partículas que forman el esqueleto de suelo.

w_i ó \mathbf{w} : Vector de desplazamiento del fluido relativo a las partículas.

$\dot{w}_i \equiv q_i$ ó \mathbf{q} : Vector velocidad en el sentido de Darcy.

$\dot{U}_i = \dot{u}_i + \frac{\dot{w}_i}{n}$ ó $\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{u}} + \frac{\mathbf{q}}{n}$: Vector velocidad absoluta del fluido.

Parámetros materiales mecánicos

\mathbf{g} : Vector aceleración de la gravedad.

K : Modulo de deformación volumétrica (mecánico)

K^s : Módulo de deformación volumétrica debida a succión (hidráulico)

G : Módulo de corte (mecánico)

e : Relación de vacíos

e_0 : Relación de vacíos inicial

n : Porosidad

n_0 : Porosidad inicial

a_1, a_2, a_3, a_4 : Constantes de la superficie de estado

Parámetros materiales hidráulicos

K_{ij}^P ó \mathbf{K}^P : Tensor permeabilidad.

k^{rl} : Permeabilidad relativa del agua.

μ^l : Viscosidad dinámica del agua.

K^s : Módulo volumétrico de los granos de suelo.

K^w : Módulo volumétrico del agua.

S_r : Grado de saturación de agua.

p_{ref} : Presión de referencia

P_{atm} : Presión atmosférica

λ : Parámetro material de la curva de retención de Van Genuchten.

P_0 :	Valor de entrada de aire a la porosidad de referencia n_0 .
f_n :	Función propuesta que tiene en cuenta la influencia de la porosidad en la curva de retención mediante el parámetro η .
η :	Parámetro de la función f_n

Densidades

ρ^s :	Densidad de las partículas sólidas del suelo.
ρ^w :	Densidad del agua.
ρ^a :	Densidad del aire.
ρ :	Densidad del suelo como conjunto de dos o tres fases distintas.

Auxiliares

δ_{ij} :	Delta de Kronecker
$\mathbf{1}$:	Tensor de segundo orden unitario
\mathbf{L} :	Operador matricial divergencia
\mathbf{n} :	Operador de proyección ortogonal

